TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

ELFTE ÅRGÅNGEN

1927—1928

STOCKHOLM
ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1928

Elfte årgångens innehåll.

Sid.

ANDERSSON, JOSEF. August Sörensen † 129
BENNER, SVEN. Några försök med högfrekvensljudvågor 97
BERGGREN, B. Bestämning av en vätskas brytningsexponent 164
BERGHOLM, C. Anm. av *Kosmos* 1927 113
— — Anm. av *Uppfinningarnas bok*, del 3 178
BLIX, KARL. Talen $\frac{\alpha^{\varphi}-\beta^{\varphi}}{2}$ och $\frac{\alpha^{\varphi}+\beta^{\varphi}}{2}$ och deras relationer 70, 131, 193
BLOM, C. E. Beskrivande uppgifter, givna i den skriftliga studentexamen i fysik 47
— — Anm. av *Erik Nilsson*, Laborationsuppgifter i allmän fysik och värmelära 116
— — Anm. av *Karl Hahn* und *Wilhelm Koch*, Physikalische Schülerübungen 241
BÖRJESON, GÖSTA. Anm. av *Bohlin-Löfman*, Lärobok i kemi för realskolan 49
FORSSTRÖM, GUST. Bestämning av en tons svängningstal med Cagniard-Latours siren 21
— — Spegel- och linsformlernas härledning 152
— — Hur en ny metod att härleda spegel- och linsformlerna tillämpas vid praktisk problemlösning 216
GUNNESON, FOLKE. Några av våra fönsterglassorters förmåga att genomsläppa ultraviolett ljus 94
GUNNESON, FOLKE och KHENNET, HALVAR. Det periodiska systemet och dess uppställning för undervisningsändamål 223
GUSTAVER, BROR. Luftens sammansättning. Ett laborationsförsök i kemi i klass 5 44
HALLSTRÖM, W. Anm. av *R. W. Pohl*, Einführung in die Elektrizitätslehre 237
HELLSTRÖM, HARRY. Ett nytt utförande av borsyreprovet 233
HERLIN, ERNST. En ny form av Galileis fallränna 14
— — Anm. av *Hj. Nilsson* och *G. H. Gustafson*, Fysik och slöjd ... 117
JOSEPHSON, KARL. Några av mikrokemins medel och metoder 32
MEBIUS, C. A. Om hela tals uppdelning i faktorer 1

Sid.
NYSTRÖM, BENGT E. Anm. av *J. Gabriel Jonsson*, Ekvationer och algebra 175
OLSON, HJALMAR. Anm. av *Isaac Newton*, Naturvetenskapens matematiska principer, Första boken 173
— — Anm. av *W. Lietzmann*, Aufbau und Grundlage der Mathematik 235
PERSSON, P. G. Anm. av *Hjalmar Olson*, Algebra och planimetri för gymnasiet 180
PETRINI, HENRIK. Realskolebildningens omläggning på naturvetenskaplig grund 23
— — Värmets mekaniska ekvivalent 81
— — Den andra huvudsatsen i värmeläran 209
STARCK, G. Radioaktiviteten och jordens historia 103, 167
— — Anm. av *Hans Pettersson*, Atomernas sprängning, en studie i modern alkemi 177
STOLT, HELGE. Den elektriska ljusbågens teori 203
STRÖMBERG, RAGNAR, Anm. av *Robert Thoraeus*, Kort handledning i fysikalisk teknik 240
WAHLGREN, AGNE. Några uppgifter för linearritningen 140
WETTERBLAD, TORSTEN. Några interferensförsök 85
— — Kapacitet och självinduktion 148
— — Anm. av *Magnus Lemoine*, Meddelande om ny materiell, häft 4 238
WINGÅRDH, K. A. »Vita»-glasets genomskinlighet för ultraviolett ljus 92
— — Enkel anordning för våglängdsbestämning med gitter 232
X. Om koncykliska punkter 65

Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser 243
Bokanmälningar (redaktionella) 181
Tidskrifter 183, 241
Kataloger m. m. 185
Insänd litteratur 56, 120, 186
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna v.-t. 1928 251
Provräkning i realskoleexamen v.-t. 1928 255
Problemavdelning (red. av S. BÅGMAN) 57, 121, 188, 244

Om hela tals uppdelning i faktorer.

Av C. A. MEBIUS.

Inledning.

Huruvida ett tal är primtal eller sammansatt och i senare fallet, vilka faktorerna äro, har i alla tider tilldragit sig matematicis intresse. Frågan löstes fullständigt redan av ERATOSTHENES († 195 f. Kr.) genom den metod, som efter uppfinnaren är känd under namnet »Eratosthenes' såll». Metoden går som bekant ut därpå, att man avlägsnar ur den naturliga talserien alla sammansatta tal. Man uppskriver först de hela talen i ordning och utesluter multiplarna av 2 genom att överstryka vartannat tal efter 2. Därefter överstrykes vart tredje tal efter 3, vart femte efter 5, o. s. v. Genom att på detta sätt utesluta multiplarna av de icke överstrukna talen erhåller man serien av primtal. En ringa modifikation av Eratosthenes' metod har använts vid konstruktionen av alla faktortabeller, som publicerats efter hans tid. Metoden är fullt korrekt, men givetvis ganska besvärlig, då fråga är om stora tal. Många metoder ha under tidernas lopp angivits för hela tals uppdelning i faktorer. En av de enklaste av dessa är LEGENDRE'S. Ofta nog tager inlärandet av de mer eller mindre komplicerade metoderna större tid i anspråk än att genast använda Legendre's, vilken för ej för stora tal lätt nog leder till resultat. Den består som bekant däruti, att man dividerar det tal T, som skall undersökas, med alla primtal mindre än $\sqrt{T}$. Går en division jämnt upp, har man funnit en faktor; går ingen division jämnt upp, är T ett primtal.

Men redan då T är omkring 2 500 har man att utföra ej mindre än 11 divisioner, divisionerna med 2, 3, 5, 11 ej inberäknade.[1]

Har man tillgång till en primtalstabell, försvinner mödan att upptäcka, om T är ett primtal eller icke. En utförlig sådan tabell utgavs 1914 av D. N. Lehmer och är Carnegie institution of Washington's publikation n:r 165. Den upptager primtalen till och med 10 006 721 och torde vara den förnämsta av alla nu existerande. År 1909 utgav Lehmer en »Faktortabell för de första tio millionerna», upptagande den minsta faktorn i varje helt tal, som icke är divisibelt med 2, 3, 5 eller 7, mellan gränserna 0 och 10 017 000. Denna är emellertid något besvärlig att använda på grund av sin uppställning. Den utgör en väldig volym på 477 sidor i dubbelkvartsformat (42 cm × 31 cm). Primtalstabellen med samma format upptager 133 sidor och kan anses vara ett utdrag ur faktortabellen. Som bevis på den försiktighet, med vilken man gått till väga vid verkens utgivande i tryck, må anföras, att varje sida av manuskriptet maskinskrevs i dubbla exemplar, vilka av olika personer granskades upprepade gånger. Sedan eventuella fel korrigerats, fotograferades varje sida på glas; dessa fotografier granskades omsorgsfullt, varpå de överfördes på zinkplattor, och dessa undersöktes noga i fråga om defekter, innan de lämnades till tryckning. På detta sätt torde man ha undvikit alla tryckfel.

Lehmers primtalstabell finnes på universitetsbiblioteket i Uppsala, på vetenskapsakademiens bibliotek i Stockholm och å stadsbiblioteket i Göteborg, där också faktortabellen finnes. Men på grund av sitt höga pris äro dessa tabeller ganska otillgängliga för den stora allmänheten och utesluta därför icke behovet av enkla metoder för hela tals uppdelning i faktorer. Intresset för undersökningar i denna riktning har även här i landet visat sig genom värdefulla

[1] Detta antal bör visserligen ej vara så avskräckande, om man räknar med logaritmer; endast då den approximativa kvoten är ett helt tal eller nära ett helt tal, bör den kontrolleras genom exakt division.

avhandlingar av NORDLUND[1], BODLUND[2] och BJÖRNBERG[3]. Om jag nu här vågar framkomma med en ny metod, så är det för att framlägga resultaten av mina egna undersökningar i frågan. Ofta är det så, att av två metoder för uppdelning i faktorer den ena lätt för till målet för ett givet tal, den andra först efter längre räkning, men för ett annat tal kan det vara tvärtom. Den metod, jag här framställer, har synts mig vara så pass enkel, att den skulle kunna användas i skolorna, åtminstone vid övningsexempel, och säkerligen är den enklare än metoden för utdragning av en kvadratrot. Kunskapen att utdraga en kvadratrot är av mera praktiskt gagn, men den är tämligen överflödig för den, som kan räkna med logaritmer, och dessutom finnas i de vanliga räknetabellerna tabeller över kvadrater och kvadratrötter. Att kunna uppdela ett stort helt tal i faktorer är en mer teoretisk kunskap, och primtalstabeller saknas i många räknetabeller och där de finnas, ha de blott ringa utsträckning.

En metod att bestämma primfaktorerna till hela tal.

§ 1. Det givna talet T, vars primfaktorer skola bestämmas, förutsättes sakna primfaktorerna 2 och 3. Det har då liksom var och en av dess faktorer formen $6p+1$ eller $6p-1$. I senare fallet är $-T=-6p+1$. Vi kunna därför alltid antaga $T=6p+1$, om vi låta T och p även vara negativa hela tal, och likartat gäller om faktorerna. Talet p skrives därefter under formen $p=6q+r\,(r<6)$, där de hela talen q och r kunna vara såväl positiva som negativa.

Vore

$$T=6p+1=(6m+1)(6n+1)=36mn+6(m+n)+1, \quad . \quad . \quad (1)$$

[1] K. P. NORDLUND: Om primfaktorer till hela tal. Nyt Tidsskrift f. Mat. A. XV. Nr 2.

[2] CARL BODLUND: Är N primtal eller ej? Denna tidskrift, 4:e årg. h. 1, sid. 23, 1920—21.

[3] EMIL BJÖRNBERG: Bidrag till läran om tals uppdelning i faktorer. Denna tidskrift, 4:e årg. h. 3, sid. 133, 1920—21.

så är $6q+r=p=6mn+m+n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

där m och n äro hela positiva eller negativa tal.

Således är

$$6=\frac{m+n-r}{q-mn},$$

och sätta vi $q-mn=y,$

så är y ett helt tal $\left(\begin{matrix}\geqq\\<\end{matrix}0\right)$ och

$$m+n-r=6y.$$

Vi ha alltså

$$m+n=r+6y \text{ och } mn=q-y. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Då äro m och n rötter till ekvationen

$$t-(r+6y)t+q-y=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_1)$$

som ger

$$t=\left.\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}=\frac{r+6y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r+6y}{2}\right)^2-q+y} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Denna form är enklast, då r är ett jämnt tal; är r udda, skriva vi

$$\left.\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}[r+6y\pm\sqrt{(r+6y)^2-4q+4y}] \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Då nu m och n äro hela tal, måste uttrycket under rotmärket vara en jämn kvadrat. Man låter därför y successivt antaga värdena 0, ± 1, ± 2, etc., undersöker för varje gång, med ledning av en kvadrattabell, om uttrycket under rotmärket är en jämn kvadrat och fortsätter räkningen, till dess att detta inträffar. Det sker alltid, om icke förr, så då $y=q$, i vilket fall $m=r+6q$, $n=0$. T är då ett primtal. Då värden på m och n erhållits, finner man två faktorer till T enligt ekv. (1). Äro dessa ej primtal, och man ej omedelbart ser deras primfaktorer, behandlas de på samma sätt som T. Detta är att föredraga framför att fortsätta den ursprungliga räkningen, vilken nog även ger dessa faktorer, men besväret är mindre, ju mindre tal man har att göra med.

Det allmänna schemat för räkningen är följande; y är där ett helt tal > 0.

Allmänt schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
r-6y & , \ldots, & r-6.2 & , r-6 & , r & , r+6 & , r+6.2 & , \ldots & r+6y \; ; \\
\hline
(r-6y)^2 & , \ldots, & (r-6.2)^2 & , (r-6)^2 & , r^2 & , (r+6)^2 & , (r+6.2)^2 & , \ldots & (r+6y)^2 \; ; \\
-4q-4y & , \ldots, & -4q-4.2 & , -4q-4 & , -4q & , -4q+4 & , -4q+4.2 & , \ldots & -4q+4y \; ; \\
\hline
(r-6y)^2-4q-4y & , \ldots, & \ldots\ldots & , \ldots\ldots & , r^2-4q & , \ldots\ldots & , \ldots\ldots & , \ldots & (r+6y)^2-4q+4y \; ; \\
=k^2 & & & & & & & & =k_1^2 ,
\end{array}$$

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}[r-6y \pm k] \qquad \text{eller} \qquad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}[r+6y \pm k_1].$$

$$T=(6m+1)(6n+1).$$

Om r är ett jämnt tal $2r_1$, förenklas räkningen. Då är $\frac{r \pm 6y}{2}$ ett helt tal $r_1 \pm 3y$, och uppställningen blir följande:

Schema, då resten r är ett jämnt tal $2r_1$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
r_1-3y & , \ldots\ldots, & r_1-3.2 & , r_1-3 & , r_1 & , r_1+3 & , r_1+3.2 & , \ldots\ldots, & r_1+3y \; ; \\
\hline
(r_1-3y)^2 & , \ldots\ldots, & (r_1-3.2)^2 & , (r_1-3)^2 & , r_1^2 & , (r_1+3)^2 & , (r_1+3\,2)^2 & , \ldots\ldots, & (r_1+3y)^2 \; ; \\
-q-y & , \ldots\ldots, & -q-2 & , -q-1 & , -q & , -q+1 & , -q+2 & , \ldots\ldots, & -q+y \; ; \\
\hline
(r_1-3y)^2-q-y & , \ldots\ldots, & \ldots\ldots & , \ldots\ldots & , r_1^2-q & , \ldots\ldots & , \ldots\ldots & , \ldots\ldots, & (r_1+3y)^2-q+y \; ; \\
=k^2 & & & & & & & & =k_1^2 ,
\end{array}$$

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = r_1-3y \pm k \qquad \text{eller} \qquad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = r_1+3y \pm k_1 .$$

$$T=(6m+1)(6n+1).$$

Anmärkningar till föregående.

1. Första raden i schemat är en aritmetisk serie med differensen 6 (eller 3), i vilken r (eller r_1) är den mellersta termen.

2. Andra raden innehåller kvadraterna på första radens termer; dessa uppskrivas omedelbart med tillhjälp av vanliga räknetabeller.

3. Tredje raden är en aritmetisk serie med differensen 4 (eller 1), i vilken $-4q$ (eller $-q$) är den mellersta termen.

4. Fjärde radens termer äro de algebraiska summorna av termerna i andra och tredje raderna. En stor mängd av dessa (i fjärde raden) behöver man ej fullständigt beräkna. Först och främst förbigås alla, som utfalla negativt. Blott sista siffran beräknas, då denna är 2, 3, 7 eller 8, emedan ingen kvadrat på ett helt tal slutar på någon av dessa siffror. Är slutsiffran 0 eller 5 beräknas även den näst sista siffran. Erhålles då 00 eller 25, beräknas även övriga siffror, i annat fall icke, ty kvadrater på hela tal med slutsiffran 0 eller 5, sluta på 00 eller 25. Med användning av kvadrattabellen avgöres lätt, om en term är kvadrat eller icke.

Ännu ett par anmärkningar skola framställas för de fall, att q är ett stort tal eller T ett primtal. Men dessförinnan må några sifferexempel anföras fullständigt för att visa, hur metoden tar sig ut i praktiken.

Ex. 1. (Björnberg ex. 11.)

$$T=2\,701=6\cdot 450+1;\quad 450=6\cdot 75+0.$$

$q=75$; $r=0$ jämnt tal.

-9,	-6,	-3,	0,	3,	6,	9,
81,	36,	9,	0,	9,	36,	81,
-78,	-77,	-76,	-75,	-74,	-73,	-72,
3	—	—	—	—	—	$9=3^2$.

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 9\pm 3;\quad m=12;\quad n=6;\quad T=(6\cdot 12+1)(6\cdot 6+1)=73\cdot 37.$$

Ex. 2. $T=2^{11}-1=2\,047=6\cdot 341+1$; $341=6\cdot 57-1$.

$q=57$; $r=-1$, udda. $-4q=-228$.

-19,	-13,	-7,	-1,	5,	11,	17,
361,	169,	49,	1,	25,	121,	289,

-240,	-236,	-232,	-228,	-224,	-220,	-216,
$11^2=121$	—	—	—	—	—	$\cdot 3$.

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \frac{-19 \pm 11}{2};\quad m=-4,\ n=-15;$$

$$T=(-6\cdot 4+1)(-6\cdot 15+1)=23\cdot 89.$$

Ex. 3. (Bodlund.) $T=2483=6\cdot 414-1$; $414=6\cdot 69+0$,

$-T=-6\cdot 414+1$; $q=-69$; $r=0$.

-15,	-12,	-9,	-6,	-3,	0,	3,	6,	9,	12,
225,	144,	81,	36,	9,	0,	9,	36,	81,	144,

64,	65,	66,	67,	68,	69,	70,	71,	72,	73,
$17^2=289$,	209,	$\cdot\cdot 7$,	$\cdot\cdot 3$,	$\cdot 7$,	69,	79,	$\cdot\cdot 7$,	$\cdot\cdot 3$,	$\cdot\cdot 7$.

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = -15 \pm 17;\quad m=2;\ n=-32;$$

$$-T=(6\cdot 2+1)(-6\cdot 32+1)=13\cdot(-191);\quad 2\,483=13\cdot 191.$$

Ex. 4. $T=6437=6\cdot 1073-1$; $1073=6\cdot 179-1$.

$-T=-6\cdot 1073+1$; $r=1$; $q=-179$; $-4q=716$.

-17,	-11,	-5,	1,	7,	13,	19,
289,	121,	25,	1,	49,	169,	361,

704,	708,	712,	716,	720,	724,	728,
$\cdot\cdot 3$,	829,	$\cdot\cdot 7$,	$\cdot\cdot 7$,	769,	$\cdot\cdot 3$,	$1089=33^2$.

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \frac{19 \pm 33}{2};\quad m=26;\ n=-7;$$

$$-T=(6\cdot 26+1)(-6\cdot 7+1)=157\cdot(-41);\quad 6\,437=157\cdot 41.$$

§ 2. Om resultat ernås hastigt eller icke, beror i väsentlig grad på faktorernas beskaffenhet. Detta framgår tydligt av följande konstruerade exempel.

Ex. 5. Antag $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 5 \pm 100.$

Då är

$$-T = (6 \cdot 105 + 1)(-6 \cdot 95 + 1) = -631 \cdot 569 = -359\,039;$$

$$q = -9\,973;\ r = -2;\ y = 2.$$

Ex. 6. Hade man i stället antagit

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 100 \pm 5,$$

hade man fått

$$T = (6 \cdot 105 + 1)(6 \cdot 95 + 1) = 631 \cdot 571 = 360\,301;$$

$$q = 10\,008;\ r = 2;\ y = 33.$$

Ex. 7. Antag $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[-1\,471 \pm 1\,457].$

Då är $m = -7$, $n = -1\,464$ och

$$T = (-6 \cdot 7 + 1)(-6 \cdot 1\,464 + 1) = 41 \cdot 8\,783 = 360\,103.$$

$$q = 10\,003;\ r = -1;\ y = -245.$$

I de tre sista exemplen äro värdena på T av samma storleksordning liksom också värdena på q, men y-värdena mycket olika. I de båda första äro faktorerna jämnstora, men i det sista exemplet är den ena faktorn något mer än 214 gånger så stor som den andra: $8\,783 = 214 \cdot 41 + 9$. (I detta fall skulle LEGENDRE's metod vida hastigare leda till resultat, om man börjar med att dividera T med de minsta primtalen.)

§ 3. Emellertid beror framgången icke uteslutande på små y-värden. Den kan vara relativt hastig även för stora y-värden, beroende därpå, att åtskilliga av fjärde radens termer i schemat aldrig behöva beräknas.

Är $q > 0$, bliva de mellersta termerna i fjärde raden till

en början negativa. Detta inträffar enligt det allmänna schemat, så länge som

$$(r \pm 6y)^2 < 4(q \mp y).$$

Försummas här y i jämbredd med q och r (som är numeriskt < 6) i jämförelse med $6y$, så får man approximativt

$$y < \tfrac{1}{3}\sqrt{q}.$$

I ex. 1 är $q = 75$, således då $8 < \sqrt{75} < 9$ är $y < 3$. De fem mellersta termerna hade man ej behövt uppskriva.

I ex. 2 är $q = 57$, och då $7 < \sqrt{57} < 8$, är $y < \frac{7}{3}$. Även här behövde man ej börja förrän med y-värdet 3.

I ex. 6 är $q = 10\,008$, och då $100 < \sqrt{10\,008} < 101$, är $y < \frac{100}{3}$. Man behöver ej börja förrän med $y = 33$, vilket värde genast ger resultat. Ex. 6 är därför i själva verket just ej besvärligare än ex. 5, ehuru i ex. 6 man har $y = 33$ och i ex. 5 $y = 2$. I båda exemplen äro faktorerna nära lika, och detta visar sig bero på i ex. 5 att $r_1 + 3y = 5$ är ett litet tal, och i ex. 6 på att $k = 5$ är ett litet tal. I ex. 7 äro både $r - 6y = -1\,471$ och $k = 1\,457$ stora tal; räkningen blir då längre.

§ 4. Betydelsen av faktorernas olikhet framgår av följande utredning. Antag, att $m = a \cdot n$. Då är enligt ekv. (3)

$$an + n = r + 6y \text{ och } an^2 = q - y. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Således är

$$n = \frac{r+6y}{a+1} \text{ och } a\frac{(r+6y)^2}{(a+1)^2} = q - y. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Fästa vi oss endast vid talvärdet av $r + 6y$, vilket betecknas med $|r + 6y|$, så är

$$\frac{|r+6y|}{\sqrt{q-y}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = K. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

I följande tabell angives värdet av K för olika a-värden jämte förhållandet $K_a : K_1$ mellan värdet på K för värdet a och dess värde för $a = 1$.

a	K	$K_a : K_1$	a	K	$K_a : K_1$
1	2	1	36	6,2	3,1
4	2,5	1,25	100	10,1	5,
9	3,3	1,67	400	20,05	10,
16	4,25	2,1	900	30,03	15,
25	5,2	2,6	1 600	40,03	20.

För stora värden på a är K proportionellt med $\sqrt{a}$. I allmänhet kan $|r|$, som är mindre än 6, försummas i jämförelse med $6y$, och y i jämförelse med q, då q är ett stort tal. Alltså är y enl. (8) approximativt proportionellt med K, d. v. s. med $\sqrt{a}$. För tal T med jämnstora värden på q är således y proportionellt med $\sqrt{a}$.

§ 5. *Avkortad räkning vid primtal.* Olägenheten på grund av faktorernas olikhet framträder i synnerhet, då talet T är ett primtal, om räkningen skulle föras fullständigt till slut. Detta är emellertid icke nödvändigt, om man övertygar sig om, att de minsta primtalen 7, 11 ... icke äro faktorer i T. Räkningen förkortas då ansenligt. Ty enligt ekv. (4) och (5) kan man skriva

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = a \pm k. \quad \ldots \quad (9)$$

Det numeriskt minsta av dessa båda värden är $a - k$, om första termen a är > 0, och $k - |a|$, om $a < 0$. Vore $7 = 6n + 1$ en faktor i T, skulle $n = a - k$ ha värdet 1, vore 11 en faktor i T, hade n värdet -2; för 13, 17, 19.. hade n värdena 2, -3, 3... Värdet av a (eller $2a$, då r är udda) avläser man omedelbart i första raden av schemat; beräknar man approximativt med tillhjälp av kvadratrotstabellen värdet av k med en decimal, så beräknas lätt $\pm (a - k)$. Har man i räkningen kommit därhän, att denna skillnad är numeriskt mindre än 1, så kan 7 icke vara faktor i T, och någon annan mindre heltalsfaktor kan icke förekomma (en eventuell faktor 5 antages bortdividerad); räkningen kan då avbrytas, ty T är då ett primtal. Vet

man, att 11 och 13 ej äro faktorer i T, så kan räkningen avbrytas, då talvärdet av $n=a-k$ är mindre än 2 o. s. v.

Dessa förhållanden belysas av följande exempel:

Ex. 8. $T=997=6\cdot 166+1$; $166=6\cdot 27+4$.

$q=27$; $r=4$.

	−10,	−7,	−4,	−1,	2,	5,	8,	11,	14,
	100,	49,	16,	1,	4,	25,	64,	121,	196,
	−31,	−30,	−29,	−28,	−27,	−26,	−25,	−24,	−23,
$k^2=$	69,	19,	—	—	—	—	39,	97,	173,
$k=$	8,3,	4,4,					6,2,	9,8,	13,2,
$n=$	−1,7,	−2,6,					1,8,	1,2,	0,8.

Då 7 och 11 ej äro faktorer i 997, behöver man ej fortsätta räkningen längre, ty n-värdet 0,8 är <1 och $1{,}7<2$. 997 är således ett primtal.

Ex. 9. $T=953$. 7 och 11 äro ej faktorer.

$-T=-6\cdot 159+1$; $q=-26$; $r=-3$. $-4q=104$.

	−27,	−21,	−15,	−9,	−3,	3,	9,	15,
	729,	441,	225,	81,	9,	9,	81,	225,
	88,	92,	96,	100,	104,	108,	112,	116,
$k^2=$	817,	533,	321,	181,	··3,	··7,	193,	341,
$k=$	28,6,	23,1,					13,9,	18,5,
$2n=$	1,6,	2,1,					−4,9,	−3,5,
$n=$	0,8,	1,0,					−2,4,	−1,7.

Enär n-värdet 0,8 är <1 och $1{,}7<2$ är 953 ett primtal.

§ 6. En fördel med den här angivna metoden för tals uppdelning i faktorer är den, att blott ett enda schema kan användas för alla tal (eller två, om man för ett särskilt vill räkna det förenklade, då resten r är ett jämnt tal). Är talet T ej stort, kommer man oftast snart till resultat, och detta sker också, då T är ett stort tal, såvida ej faktorerna äro mycket olika. En olägenhet med metoden är,

att divergensen hos serien i den första raden av schemat är svag. Detta beror därpå, att faktorerna uttryckas under formen $6m+1$. Ville man ha en hastigare divergens, kunde man välja formen $10m+r$, såsom i herrar Bodlunds och Björnbergs metoder, $12m+r$ eller $30m+r$. Men därvid förloras fördelen av att hava ett enda schema för uppdelningen, och förberedelsen för denna blir mera komplicerad, ehuru visserligen ibland räkningen blir kortare.

Utbyter man talet 6 mot 10, finner man, att alla tal, som icke innehålla 2 eller 5 som en faktor, kunna skrivas under en av formerna

$$10m+1 \text{ eller } 10m+3, \quad m \gtreqless 0.$$

Man kan därför dela talen T i tre klasser

$$T_1=(10m_1+1)(10n_1+1); \quad T_2=(10m_2+1)(10n_2+3);$$
$$T_3=(10m_1+3)(10n_1+3).$$

T_2 har slutsiffran 3 eller 7. $3m_2$ och n_2 äro rötter till den med (3) analoga ekvationen

$$t^2-(r+10y)t+3q-3y=0,$$

där q och r äro bestämda ur formen $T_2=100q+10r+1$.

Både T_1 och T_3 ha slutsiffran 1 eller 9, och man vet då ej till vilken klass talet hör. Man får då försöka med båda formerna, eller också multiplicerar man talet med 3, varvid $3T_1$ och $3T_3$ få slutsiffran 3 eller 7, så att talet antar formen T_2. Härvid inträffar dock stundom, att faktorn 3 associerar sig med den större faktorn i T_1 eller T_3, och räkningen blir då längre. Schemat för räkningen är analogt med det förut angivna.

Utbyter man talet 6 mot 12, finner man, att alla tal, som ej ha någon av faktorerna 2 eller 3, kunna skrivas under en av formerna

$$12m+1 \text{ eller } 12m+5, \quad m \gtreqless 0.$$

Man får även här tre klasser

$$T_1=(12m_1+1)(12n_1+1); \quad T_2=(12m_2+1)(12n_2+5);$$
$$T_3=(12m_3+5)(12n_3+5).$$

T_1 lämnar efter division med 12 resten 1 eller 11, T_2 resten 5 eller 7, T_3 resten 1 eller 11. Liknande anmärkningar som de nyss anförda kunna även här framställas.

Antager man, att faktorerna i T ha formen $30m+r$, blir divergensen i schemats första rad betydligt kraftigare, men i stället uppträda ännu flera klasser än i föregående båda fall, i det att de tal, som ej innehålla någon av faktorerna 2, 3 eller 5, ha en av formerna

$$30m+1,\ 30m+7,\ 30m+11,\ 30m+13,\ m \gtreqless 0.$$

En ny form för Galilei fallränna.

Av ERNST HERLIN.

Vid det elementära studiet av fallrörelsen utgår man vanligen från försök med Atwoods fallmaskin eller med Galilei ränna. I båda fallen uppnår man en minskad acceleration, vid fallmaskinen tack vare en ökning av massan i förhållande till den verksamma kraften och vid fallrännan genom att tvärtom minska kraften. Nu innebär Atwoods fallmaskin ett alltför invecklat problem för att fullt kunna förstås av den, som tar sina första steg på mekanikens område. Den åskådliggör visserligen en accelererad rörelse, men tillåter icke på detta stadium en beräkning av accelerationen vid fritt fall, emedan man ännu icke — och i enlighet med våra nu gällande lärokurser överhuvudtaget icke alls på gymnasiet — kan taga med i beräkningen det roterande hjulets massa.

Betydligt enklare till sin princip är fallrännan. Från behandlingen av det lutande planet inom statiken känner eleven väl till, hur den med planet parallella tyngdkraftskomposanten ändras med planets lutning. Genom en serie försök rörande en kropps fall utefter det lutande planet, fallrännan, kan man nu icke endast härleda lagarna för den accelererade rörelsen, utan även finna, hur accelerationen beror av planets lutning och således även av den nyssnämnda kraften, varigenom rörelsens orsak avslöjas. Genom att undersöka rörelsen vid alltmer ökad lutning av planet borde man även kunna extrapolera till den fria fallrörelsen. Men här möter man, som bekant, det besvärliga förhållandet, att man finner ett alldeles för litet värde på accelerationen.

Anledningen härtill får varje ung adept i den vetenskap, Galilei grundlade, tillfälle att begrunda, när han möter det välbekanta problemet om »rörelsen hos en rotationskropp, som med horisontell axel rullar utför ett strävt lutande plan». Under förutsättning att kroppen rullar utan att glida, utför dess tyngdpunkt en translationsrörelse, medan kroppen roterar kring axeln genom tyngdpunkten. Denna senare rörelse tar för sig så mycket av kroppens potentiella energi, att translationsrörelsen icke får den acceleration, som rätteligen tillkommer en utför ett glatt lutande plan glidande kropp, nämligen:

$$a = g \cdot \sin v, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

där v är planets lutningsvinkel, utan i stället endast

$$a = \frac{g \cdot \sin v}{1 + \frac{k^2}{r^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

där k är gyrationsradien och r är radien hos den cirkel, varmed kroppen berör planet vid sin rörelse. För korthetens skull vill jag här kalla denna radie för »hjulradien».

Alltsedan Galilei tid har man väl utfört experimentet med fallrännan så, att man låtit en kula rulla i en rännformig fördjupning på ett lutande plan. Under förutsättning att kulan härvid rullar på bottnen av rännan, blir i ovanstående uttryck för accelerationen

$r = R =$ klotets radie, och

$$k^2 = \frac{2}{5} \cdot R^2,$$

varav $$a = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin v = 0{,}714 \cdot g \cdot \sin v \ldots \quad (3)$$

m. a. o. accelerationen blir föga mer än 71 % av den för den glidande kroppen beräknade.

Om klotet åter har så stor radie, att det rullar på rännans kanter, blir »hjulradien» r mindre än klotradien. Detta medför, såsom lektor Björnsson tidigare påpekat i

denna tidskrift[1], att accelerationen får ett ännu mindre värde än det ovan angivna.

Naturligtvis kan man icke i första ringen och knappast ens i den fjärde gå närmare in på förklaringen av här berörda förhållande.[2] Vill man till fullo utnyttja fallrännan vid den grundläggande undervisningen i mekanik, måste man därför i stället söka få fram ett värde på accelerationen, som så mycket som möjligt närmar sig det för den glidande kroppen beräknade. Av uttrycket (2) framgår, att detta endast kan ske därigenom, att man, så långt möjligt är, pressar ner värdet på förhållandet mellan gyrationsradien och »hjulradien». Ett sätt att nå detta mål vore att använda ett träklot, försett med en koncentrisk, sfärisk hålighet, fylld med bly e. d. Emedan ett sådant klot dock är besvärligt att tillverka, synes det lämpligare att försöka ersätta det med en cylinder av lätt material, försedd med en konaxial cylinder av ett tyngre material. Den tunga kärnan gynnar uppkomsten av en relativt liten gyrationsradie, även om den lätta, yttre cylinderns radie, som blir identisk med »hjulradien», göres förhållandevis stor.

En enkel överläggning visar dock, att dessa cylindrar ej böra dimensioneras godtyckligt, utan att ett visst förhållande mellan deras radier bör eftersträvas. Betrakta för detta ändamål en cylinder (fig. 1) av höjden H, basradien R och spec. vikten γ, vilken är försedd med en konaxial cylinder av höjden h, basradien r och spec. vikten γ_1. Antas härvid $\gamma_1 > \gamma$, och sättes

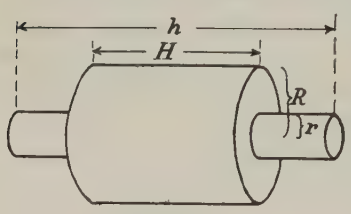


Fig. 1.

$$\frac{R}{r} = n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

[1] Årgång 3, sid. 119.

[2] Ännu mindre kan detta ske i ett populärvetenskapligt arbete, såsom den av mig utgivna »Fysiken i vardagslivet». Där har jag fördenskull vid refererandet av försöket med Galilei ränna måst nöja mig med att uppgiva, att de olika förekommande siffervärdena äro »ungefärliga».

erhålles följande värde på gyrationsradiens kvadrat:

$$k^2 = \frac{H \cdot \gamma \cdot n^4 + h \cdot \gamma_1 - H \cdot \gamma}{H \cdot \gamma \cdot n^4 + (h \cdot \gamma_1 - H \cdot \gamma) \cdot n^2} \cdot \frac{R^2}{2} \quad . \quad . \quad (5)$$

Man finner lätt,[1] att denna funktion har ett *minimum* för

$$n^2 = 1 + \sqrt{\frac{h \cdot \gamma_1}{H \cdot \gamma}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

varvid gyrationsradiens minimivärde bestämmes av

$$k^2 = \frac{R^2}{1 + \sqrt{\frac{h\gamma_1}{H\gamma}}} = \frac{R^2}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Av (4) följer nu: $k = r$.

Räkningen leder således till det resultatet, att *om cylindrarna dimensioneras så, att gyrationsradien blir så liten som möjligt, kommer gyrationsradien att sammanfalla med den inre cylinderns radie.*

Enligt (2) erhålles därvid såsom ur här påtalade synpunkt gynnsammaste resultat för en sådan dubbelcylinder värdet

$$a = \frac{g \cdot \sin v}{1 + \frac{r^2}{R^2}} = \frac{g \cdot \sin v}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{h\gamma_1}{H\gamma}}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Som ett exempel må det sagda tillämpas på en cylinder

[1] Om $H\gamma = a$ och $h\gamma_1 - H\gamma = b$, erhålles:

$$\frac{dk^2}{dn} = \frac{4an^3(an^4 + bn^2) - (4an^3 + 2bn)(an^4 + b)}{(an^4 + bn^2)^2} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Max. eller min. inträffar för

$$4a^2n^7 + 4abn^5 - 4a^2n^7 - 4abn^3 - 2abn^5 - 2b^2n = 0,$$

$$an^5 - 2an^3 - bn = 0,$$

varav dels $n = 0$, dels $n^2 = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{b}{a}} = 1 + \sqrt{\frac{h\gamma_1}{H\gamma}}$.

Det sista värdet gör $\frac{d^2k^2}{dn^2} > 0$ och motsvarar således minimivärdet. Insättes (6) i (5), erhålles (7).

av trä ($\gamma = 0{,}6$) med en cylindrisk blykärna ($\gamma_1 = 11{,}3$) av *samma* längd ($H = h$). Gyrationsradien får nu minimum, om

$$n^2 = 1 + \sqrt{\frac{11{,}3}{0{,}6}} = 5{,}336,$$

$$n = 2{,}31,$$

$$k = r = \frac{R}{2{,}31} = 0{,}433 \cdot R.$$

Blykärnans radie bör alltså i detta fall vara c:a 43 % av träcylinderns. Som värde på accelerationen erhålles

$$a = \frac{g \cdot \sin v}{1 + \frac{1}{5{,}336}} = 0{,}84 \cdot g \cdot \sin v.$$

Till jämförelse må nämnas, att en *homogen* cylinder, där

$$k = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot R,$$

får accelerationen

$$a = \frac{g \cdot \sin v}{1 + \frac{1}{2}} = 0{,}67 \cdot g \cdot \sin v.$$

Av (8) framgår, att man kommer det teoretiska värdet för den glidande kroppens acceleration närmare, ju större man lyckas göra rotuttrycket i nämnaren. Man bör fördenskull eftersträva en inre cylinder, som är lång och tung (stora värden på h och γ_1), och en yttre cylinder, som är så lätt och så kort som möjligt (små värden på H och γ). Idealet vore en tunn cirkulär skiva med en lång och tung axel genom dess medelpunkt, men ett sådant ekipage kan tyvärr icke hålla balansen.

Svårigheten löses genom att helt enkelt med ett mot axeln vinkelrätt snitt klyva den yttre, tunna cylindern i två hälfter och placera dem på något avstånd ifrån varandra, symmetriskt i förhållande till den inre cylinderns tyngdpunkt. Man får då en kropp, som kan anses bestå av två lätta hjul på en gemensam tung axel. Fig. 2 visar

en sådan, tillverkad av två stycken 1 mm tjocka fiberplattor, vilka, på det sätt figuren antyder, blivit fästa på en 10 cm lång mässingsaxel. Här ha de i (8) ingående

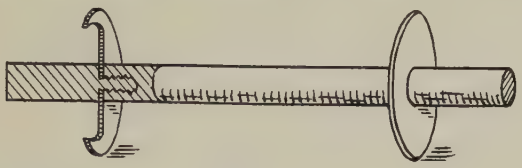


Fig. 2.

storheterna följande värden: $\gamma = 1{,}15$; $\gamma_1 = 8{,}6$; $H = 0{,}2$ cm $= (0{,}1 + 0{,}1)$; $h = 10$ cm.

Det lämpligaste förhållandet mellan hjulens och axelns radier erhålles enligt (6) ur

$$n^2 = 1 + \sqrt{\frac{10 \cdot 8{,}6}{0{,}2 \cdot 1{,}15}} = 19{,}3,$$

$$n = 4{,}39,$$

varav $$k = r = \frac{R}{4{,}39} = 0{,}228 \cdot R.$$

Hjulradien bör alltså göras 4,39 gånger mässingsstångens radie. Denna kropp rullar utför planet med en acceleration

$$a = \frac{g \cdot \sin v}{1 + \frac{1}{19{,}3}} = 0{,}951 \cdot g \cdot \sin v.$$

Jag har alltså här kommit fram till ett värde, som med mindre än 5 % skiljer sig från det teoretiska. Den som önskar gå ännu längre, kan förse hjulen med urstansade hål, vilket möjliggör en ökning av hjulradien utan att gyrationsradien växer. Det går också an, att göra axeln längre och även tyngre — genom att ersätta mässingsstaven med ett blyfyllt mässingsrör — och möjligen går det också att göra hjulen tunnare.

Att nedlägga alltför mycken möda på att komma ännu närmare det teoretiska värdet torde dock inte löna sig. Mätningarna i övrigt vid detta experiment äro ju icke så exakta, och planets beskaffenhet kan också innebära fel-

källor. I själva verket har jag fått relativt goda resultat med en kropp, som visst icke har de ideala dimensionerna, nämligen en vanlig, större trådrulle (sytråd n:r 40), genom vars hål jag kört en mässingsstav av trådrullens dubbla längd. Det ena »hjulet» på rullen hade visserligen något större diameter än det andra, men felet avhjälptes lätt genom att i svarven behandla rullen med en fil och sandpapper. Ger man på detta sätt hjulen exakt samma diameter, rullar trådrullen utan missöde utför planet. Tvärsöver detta, vid dess överkant, kan man lämpligen fästa en anslagslist, så att man utan besvär placerar rullen rätt, med axeln vinkelrätt mot planets längdriktning. Själva planet kan bestå av en enkel, hyvlad planka. Någon ränna e. d. behövs inte. Lämpligen förser man det på den mot klassen vända kanten med en tydlig centimeterskala (minst 200 cm).

I de ovanstående kalkylerna ingår endast *förhållandet* mellan de båda radierna — »hjulradien» och gyrations- eller axelradien. Den som så önskar, kan därför välja dem så, att hela ekipaget får en viss, bestämd vikt (t. ex. 100 g), varigenom man kan förenkla räkningarna, om man med dynamometerns tillhjälp vill bestämma, hur stor del den vid rörelsen verksamma kraften utgör av hela tyngden. Härvid förbindes rullen med dynamometern genom en trådslinga, lagd runt mitten av rullen, vilken fördenskull här är försedd med en runt densamma gående hålkäl.

Ersätter man den vanligen brukade typen av Galilei fallränna med en apparat av här refererade egenskaper, kan man med dess tillhjälp på ett enkelt och lättfattligt sätt[1] och redan på ett tidigt stadium ganska fullständigt behandla några av dynamikens viktigaste lagar.

[1] I ett kommande nummer av denna tidskrift skall lämnas en framställning av »fallrännans metodik».

Bestämning av en tons svängningstal med Cagniard-Latours siren.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Handböckerna i fysik avråda bestämt från att använda ovannämnda siren för kvantitativa försök och detta på grund av svårigheten att hålla sirenens ton vid önskad konstant höjd. Då min erfarenhet sedan länge[1] gått i motsatt riktning, skulle det glädja mig, om dessa rader kunde åstadkomma, att Cagniard-Latours siren, som väl finnes vid våra flesta läroverk, hädanefter icke betraktades som ett museiföremål utan tvärtom flitigt toges i bruk.

Vid en fysiklektion å härvarande katedralskola gällde det nyligen att bestämma svängningstalet för en läppipa, märkt a_1, d. v. s. ettstrukna a. På vindlådan till en fotbälg placerades dels pipan dels en Cagniard-Latours siren *med inkopplat räkneverk*.[2] Försedd med ett s. k. stoppur i ena handen och en fågelfjäder i den andra, satte jag mig att trampa bälgen, varvid sirenen snart började sjunga på en allt högre ton. Genom att då och då låta pipan avge en kort signal kunde man lätt konstatera, när båda ljudkällorna gåvo samma ton. Från detta ögonblick fick pipan utan avbrott ljuda samtidigt med sirenen, vars ton naturligtvis fortfarande hade benägenhet att stiga i höjden. För att hindra detta bromsade jag försiktigt med fjädern den roterande sirenskivan och lyckades efter någon övning hålla tonen tillräckligt konstant. När detta stadium nåtts, sattes stoppuret i gång, just då räkneverkets snabbare visare, som kunde angiva t. o. m. 100 varv av den roterande

[1] Jfr *Landau:* »Zur Anwendung der Sirene im Unterricht», Zeitschrift für den phys. und chem Unterricht XXV, 1912, sid. 299—300.

[2] Följes den vanliga anvisningen att spara inkopplingen av räkneverket, tills sirenen nått den avsedda tonhöjden, och räkna tiden från inkopplingsögonblicket, blir bestämningen felaktig; emedan sirentonen givetvis sjunker vid inkopplingen.

skivan, passerade nollpunkten, och stoppades, när samma visare gjort jämnt 10 omlopp under kontroll av en till apparaten framkallad lärjunge.

På stoppuret avläste två andra lärjungar, med uppskattning av en halv femtedels sekund, tiden till 46,7 sekunder. Då sirenskivan befanns hava 20 hål, blev tonens svängningstal uppenbarligen

$$a_1 = \frac{20 \cdot 10 \cdot 100}{46{,}7} = 428.$$

Med en normal a_1-gaffel, som alltså utförde 435 svängningar i sekunden, fastställdes, att pipans ton var något lägre än gaffelns. Detta förklarades av att pipan enligt uppgift från fabrikanten (Max Kohl, Chemnitz) hade s. k. fysikalisk stämning, där $c_1 = 2^8 = 256$ i stället för $\frac{3}{5} \cdot 435 = 261$. I fysikalisk stämning blir således det teoretiska värdet

$$a = \frac{5}{3} \cdot 256 = 426\frac{2}{3},$$

från vilket det genom försök erhållna skiljer sig med mindre än 1 %. Att denna goda bestämning icke berodde på en tillfällighet torde framgå därav, att jag vid preparation på egen hand ett par dagar före nu skildrade försök erhöll värdet

$$a_1 = \frac{20 \cdot 10 \cdot 100}{47{,}2} = 424,$$

som också differerar med mindre än 1 % från det teoretiska värdet.

Som synes kräver metoden inga extra anordningar, tager kort tid i anspråk och lämnar utmärkt resultat. Självfallet måste den, som utför experimentet, kunna höra, när två tonkällor ljuda unisont. Skulle — mot förmodan — någon lärare ej tilltro sig detta, finnes det säkerligen bland lärjungarna någon eller några, som i denna punkt kunna och vilja övertaga lärarens roll.

Lund i april 1927.

Realskolebildningens omläggning på naturvetenskaplig grund.

Av HENRIK PETRINI.

Alltsedan Pestalozzis tid har det varit en pedagogisk trossats, att undervisningen bör utgå från det konkreta och åskådliga för att sedan successivt upptaga det mer abstrakta. Men hur har denna allmänt erkända princip tillämpats i våra skolor? De mest konkreta och åskådliga ämnena, fysik och kemi, borde jämte geometri vara den grund, som utgör den första undervisningen, varpå en senare mera abstrakt kan byggas. Nu äro dessa ämnen bannlysta från skolans två à tre nedersta klasser, och i stället få barnen läsa tysk grammatik och andra abstrakta ämnen, som icke passa för deras ålder, och varav de enligt språklärarnas eget medgivande ha mycket liten behållning.

Detta bakvända system har sin förklaring i rent historiska förhållanden, och några sakskäl kunna numera icke anföras för dess bibehållande. Fysiken och kemien äro relativt nya vetenskaper och hava länge varit framställda i en för den stora allmänheten otillgänglig form. Först på senare tid hava de, tack vare laboratorieundervisningen, kunnat meddelas på sådant sätt, att de blivit lättfattliga även för barn på ett mycket tidigt stadium. För närvarande finnes det intet hinder för att skolundervisningen redan från början grundas på rent rationella principer.

Pedagogiska försök.

För att studera, hur en sådan undervisning lämpligen skall bedrivas, har jag vid två tillfällen övertagit matematikundervisningen från och med första klassen och i samband därmed bedrivit laborationer i geometri och fysik,

varvid dock ingen extra tid stått till mitt förfogande. Vid det ena tillfället har jag i tredje klassen haft frivilliga laborationer i kemi. Resultatet av dessa pedagogiska försök må här i korthet angivas.

Matematik. Matematiken behandlas i de nedersta klasserna alltför abstrakt. Ty ehuru den *geometriska åskådningsläran* är mera åskådlig än aritmetiken, så är den dock uppskjuten till tredje klassen i stället för att börja i den första. Genom att låta *konstruktionsövningar* och *planimetriska mätningar* gå hand i hand med undervisningen i aritmetik kan man få goda och intresseväckande tillämpningsövningar på den aritmetiska kursen till innötning av räknefärdigheten. I början böra de geometriska resultaten eller satserna vinnas uteslutande genom mätningar, men utan bevis, ungefär såsom man härleder fysiska lagar, t. ex. hävstångslagen, genom experiment, och härigenom blir geometrien en god förberedelse till sådana experiment.

Genom konstruktion finna lärjungarna i första klassen omedelbart, att höjderna liksom medianerna i en triangel råkas i en punkt. Vissa geometriska satser äro mindre omedelbara och härledas lättast, om eleverna först uppsätta en tabell över de funna värdena. Så fingo lärjungarna i första klassen rita en godtycklig triangel i sina geometriska konstruktionsböcker, draga medianerna, kalla den mindre delen av en median för a, den större för b, uppmäta dem samt införa värdena i en tabell. På frågan: »märka ni något?», är det först några få, så allt fler och fler, som anmäla, att de funnit något anmärkningsvärt, och snart ha de flesta märkt, att den större delen är dubbelt så stor som den mindre, d. v. s. $b = 2a$. Förut ha de lärt sig, hur man kan beräkna ytan av en triangel och härlett formeln $T = {}^1/_2$ bh. På detta sätt bli de, utan att märka det, redan från början införda i de algebraiska beteckningarna.[1]

Mekaniken utgör den mest omedelbara tillämpningen av geometrien och bör studeras i samband med denna såsom

[1] Se f. ö. H. Petrini, »Geometrisk mätningslära», 1917.

en lämplig omväxling. Hit höra tyngdpunktkonstruktioner, hävstångslagen och specifik viktbestämning. Enklare pendelförsök äro särdeles lämpliga till utförande i hemmet.

Fysik. Ingenting intresserar små barn så som fysik och kemi. Barn visa ett livligt begär att allmänbilda sig och vinna klarhet i de frågor, som omedelbart uppställa sig för dem, frågor, som framför allt gälla de skiftande naturfenomen, som de oupphörligt möta i sitt dagliga liv. Pojkar i första klassen intressera sig för ångmaskiner och motorer; de använda sina lediga stunder till att konstruera elektriska motorer eller att taga fotografier och framkalla plåtarna; de äro mycket angelägna om att få veta, hur »syrorna» kunna ha en så underbar verkan.

Skolan bör nu knyta undervisningen till barnets kunskapstörst och naturliga verksamhetsbegär, så att den ger barnen lärorik och intresseväckande sysselsättning i hemmet och ger dem besked om de saker de vilja ha reda på. Men som det är ställt i skolan, få barnen intet svar på sina frågor i sak, på sin höjd få de veta, vad saken — heter på tyska! Någon vidare motivering för fysikundervisningens införande i första klassen behöver numera inte komma i fråga; det skulle blott vara ett upprepande av sedan ett tiotal år kända argument. *Däremot har det aldrig mig veterligt anförts något skäl för fysikundervisningens uppskjutande till fjärde klassen, helst den i andra länder numera börjar långt tidigare än hos oss.*

Fysikens studium bör alltså taga sin början redan första terminen i första klassen, där det bör bedrivas mer kvalitativt. Barnen böra, när det passar, få själva säga till om vad de önska undersöka och på så sätt övas att som en fysiker »ställa frågor till naturen», och kamraterna få hjälpas åt att fundera ut, hur man skall bära sig åt för att få ett klart svar av henne. Trä- och metallslöjd böra vara obligatoriska, då detta underlättar utförandet av experiment i hemmen, och läraren bör giva lärjungarna anvisning, hur de skola kunna tillverka trevliga maskiner eller modeller och apparater.

Man bör akta sig för en alltför sträng systematisering vid dessa experiment. Barnet lever i en komplicerad värld; det förnimmer inte bara ljus den ena terminen och bara ljud eller värme den andra. Det behöver utveckla *alla* sina sinnen samtidigt och öva sig i att göra riktiga iakttagelser med dem alla. Likaså behöver det klarera sina omedelbaraste begrepp på alla områden så fort som möjligt, ty dessa höra intimt tillhopa.

Vidare bör man inte alltför ensidigt hålla sig till de kvantitativa experimenten, ty de kvalitativa äro dock de primära, när det gäller något nytt fenomen eller en ny uppfinning. Lämpliga kvalitativa experiment äro de magnetiska, och elektricitetsläran är alldeles särskilt lämpad för instrumentbeskrivning och smärre föredrag av lärjungarna.

I överensstämmelse med lärjungarnas uttalade önskan har jag i tredje klassen gått igenom en kurs i elektricitetslära. Men därvid förekommo inga laborationer, då jag ville pröva deras förmåga att tillgodogöra sig en ordinär undervisning. De fingo föra anteckningar över de experiment och apparater jag visat dem, och anteckningarna renskrevos i laborationsböckerna, så att jag har kunnat kontrollera, att de förstått det genomgångna. I denna klass ha lärjungarna visat ett livligt intresse för att hålla föredrag om diverse ämnen, som intresserade dem, såsom elektriska trollkonster, telefonen, telegrafen, kraftstationer, generatorer m. m., som de närmare studerat i någon bok, eller också ha de hållit föredrag över apparater, som de själva gjort.

Härmed torde jag ha konstaterat dels den experimentella undervisningsmetodens lämplighet i läroverkets två nedersta klasser, dels att barnen i tredje klassen äro fullt mogna för en mer receptiv undervisning i fysik.

Kemi. Kemin är det sanna pojkämnet. Intet ämne lockar pojkar till självstudium i så hög grad som kemi, och mången femteklassist har gärna sitt eget lilla laboratorium. Men vad skall man säga om en liten parvel i andra klassen, som alldeles på egen hand tar sig för att laborera kemi med ledning av Cleves lärobok, som han händelsevis kommit

över? Han hade framställt ett trettiotal preparat, som han på min anmodan kompletterade med en beskrivning över framställningen. Ett utdrag:

»*Svaveltenn:* Fick jag genom att smälta tillsammans stanniol och svavel. Jag fick föreningen såsom en gråvit kropp, men på somliga ställen fann jag små gulröda kristaller av en annan förening mellan svavel och tenn.»

Denna beskrivning visar gossens öppna blick för noggranna iakttagelser och hans försök att förklara, vad han ser. Man lägge märke till att hans intresse gick ut på att framställa nya ämnen d. v. s. syntes. Detta är psykologiskt sett fullt normalt, ty en verksamhet väcker intresse, när man genom den kan åstadkomma ett påtagligt resultat: »se, det här har jag gjort». Vad kan väl vara mer fascinerande för en elvaåring än att framtrolla ett alldeles nytt ämne, helst om det blir en vacker kristall? Denna gosse lär oss sålunda genom sitt originella tilltag, att kemien för nybörjare snarast möjligt bör gå ut på syntes.

Formler. De kemiska formlerna infördes på det sättet, att t. ex. »O» tolkades som »16 g syre» etc. Därvid visade det sig, att ingen svårighet finnes för lärjungarna i tredje klassen, även för dem, som äro svaga i matematik, att förstå de kemiska beteckningarna och att själva härleda enklare reaktionsformler. Beräkning av en kemisk förenings procentiska sammansättning ur dess kemiska formel roar lärjungarna, och sådana exempel på procenträkning betraktas av dem som jämförelsevis lätta. Framställes Avogadros lag under den formen, att en grammolekyl av en gas intar en volym av 22,4 liter, så kunna de även beräkna specifika vikten av en gas ur dess kemiska formel.

Om någonsin en undervisning har intresserat både lärare och elever, så har det varit dessa frivilliga kemilaborationer i tredje klassen, trots det de ägde rum på extra tid och trots det lärjungarna ständigt påmindes om att det kemiska studiet inte alls skulle inverka på betyget i matematik. Det finnes dock ingen anledning att uppskjuta kemiundervisningen till femte klassen.

Den femåriga realskolans två nedersta klasser.

Tillämpas dessa resultat på den blivande femåriga realskolan, skulle den grundläggande matematiska och fysiskt-kemiska övnings- och åskådningsundervisningen lämpligen kunna anordnas efter följande grunder.

Den geometriska åskådnings- och mätningsläran genomgås i de två nedersta klasserna i samband med aritmetik. De viktigaste planimetriska och stereometriska satserna erhållas först genom mätningar och induktionsslut, såsom fallet är vid den fysiska laborationsundervisningen. Mot slutet kunna några enkla deduktioner undantagsvis förekomma. I omedelbart samband med denna genomgås metersystemet med övningar även i vägning, dock ej nödvändigt med delgramvikter, samt andra enklare kvantitativa *mekaniska* experiment.

I *fysik* förekomma i första klassen huvudsakligen kvalitativa experiment och lektioner på kroppars allmänna egenskaper, blandningar, löslighet, värmets inflytande, magnetism, elektrostatik, ljus och ljud. I andra klassen förekomma inga egentliga laborationer i fysik i skolan. På lektionstimmarna sammanfattas resultaten av föregående års erfarenheter, varjämte elektrodynamiken genomgås och apparaterna avritas och beskrivas. Föredrag.

I *kemi* meddelas undervisningen i första klassen tillsammans med fysiken. Härvid genomgås något om kroppars kemiska löslighet, värmets inverkan i kemiskt hänseende samt något om metaller och mineral. I andra klassen meddelas undervisningen huvudsakligen genom laborationer. Efter några inledande experiment övergår man till syntes av ett tjugutal ämnen. Därefter vidtager analys av enkla salter efter ett överskådligt skema.

Inga andra läroböcker i mätningslära, fysik och kemi torde behöva användas än lärjungarnas anteckningar. Givetvis bör det vara samma lärare i dessa ämnen. Förutom de geometriska mätningsövningarna bör varje lärjunge hava en laboration i veckan.

Den femåriga realskolans tre övre klasser.

Matematiken fortgår i huvudsak efter samma linjer som nu. Men exemplen till ekvationsläran böra ej som nu huvudsakligen väljas bland gissgåtorna eller utgöras av krystade baklängestal utan praktiskt värde. I stället böra de i stor utsträckning behandla enkla fysiska och kemiska uppgifter.

Fysik och kemi. I realskolan bör medhinnas en kurs i fysik, ungefär motsvarande latinlinjens nuvarande kurs. I kemi läsas metallerna före metalloiderna, då de förra äro lättare. Endast de viktigaste grundämnena och de enklaste föreningarna behandlas av hela klassen. Tekniska tillämpningar böra särskilt beaktas.

Kort historik.

Skolans organisation har sedan hundra år tillbaka behandlats som en rent humanistisk fråga. Ty ända sedan Berzelius' tid har ingen kemist eller fysiker suttit i en skolkommitte och detta ehuru hela den moderna kulturen vilar på naturvetenskaperna. Och fastän både gammal och ny pedagogik fordrar, att all barnuppfostran skall byggas på naturvetenskaplig grund, hade läroverkskommittén 1902 så grundligt tagit fel i fråga om de första principerna, att den rent av diskuterade, om ämnena fysik och kemi inte borde strykas från realskolans skema. Den vågade dock ej taga steget fullt ut, utan stannade vid att föreslå en minskning av dessa ämnens timtal med två tredjedelar eller från sex veckotimmar till två.

Detta väckte en storm av ovilja i hela landet, och stödd på den mest imponerande petition kunde professor de Geer väcka motion i riksdagen om fysikens och kemiens förbättrade ställning i realskolan. Då laboratorieundervisning där var något alldeles nytt, vågade han ej föreslå, att undervisningen i dessa ämnen i ett slag skulle nedflyttas till första klassen, utan han nöjde sig med att föreslå, att denna undervisning skulle börja i tredje klassen. Den de Geerska motionen antogs av Andra kammaren, men avslogs av den

Första. Sedermera lyckades läroverksrådet Moll genomdriva en kompromiss, så att fysikundervisningen börjar i fjärde klassen i stället för i tredje, men genom införandet av frivilliga laborationer höjdes totala tiden från dåvarande sex veckotimmar till tolv, medan läroverkskommittén föreslagit två.

Sålunda är den naturvetenskapliga uppfostringsmetoden numera i princip erkänd i vårt skolväsen, ehuru den inte genomfördes mer än i realskolans tre övre klasser och i gymnasiet. Men intet giltigt skäl finnes för att den nödvändiga reformen skulle genomföras endast till hälften i realskolan, vadan den nuvarande realskolan endast är en övergångsform, och från den synpunkten kan den sägas ha haft en mission, som nu är fylld.

Tyvärr kan ingen genomgripande förbättring av skolorganisationen väntas, om icke lärarna i dessa ämnen taga saken i egna händer. Ty samma brist på förståelse för naturvetenskapernas betydelse för barnaundervisningen hava *samtliga* senare för undervisningsfrågor tillsatta kommitteer visat. Ej nog med att de icke kunnat framkomma med något eget uppslag, utan *ingen av dem har ens förstått att taga reda på hur det förhåller sig i utländska skolor* i detta avseende. Men så hava också i samtliga skolkommitteer, som tillsatts under detta århundrade ämnena fysik och kemi ej varit bättre representerade än i läroverkskommittén, som dock blev så kapitalt desavuerad. Så ha de sista sakkunniga varit så exklusivt humanistiskt betonade, att de ha måst tillkalla särskilda sakkunniga i vart och ett av de naturvetenskapliga ämnena: matematik, fysik, kemi, biologi och geografi. En följd av denna ensidiga sammansättning är, att *de sakkunnigas skolplaner äro alldeles värdelösa.*

Det tjugufjärde svenska läroverkslärarmötet har behjärtat dessa synpunkter och i en skrivelse till konungen anhållit,

»att, därest en skolkommitté skall tillsättas för timplanernas m. m. definitiva upprättande, de matematiska och naturvetenskapliga ämnena bliva lika starkt representerade som de humanistiska».

Förslag till timplan.

Intet läroämne bör ha endast en veckotimme, och då laborationerna i ett ämne böra förekomma varje vecka, så kunna ämnena fysik och kemi, där de äro åtskilda, ej ha lägre timtal än tre veckotimmar vartdera. Då vidare de geometriska mätningsövningarna böra taga en dubbeltimme i anspråk och omfatta även de kvantitativa experimenten i fysik i de två lägsta klasserna, så måste även timtalet för matematiken utökas, helst barnen komma till första klassen i den femklassiga realskolan med väsentligt mindre förkunskaper i matematik än nu till andra klassen.

I realskolan ha humaniora gjort sig breda på naturvetenskapernas bekostnad, och det är då helt naturligt, att de måste vika undan och ge plats åt de senares berättigade krav. De kunna taga skadan igen på ett högre stadium, nämligen i gymnasiet; särskilt torde det abstrakta grammatiserandet böra uppskjutas till ett mognare åldersstadium. Så bör ske även av det skälet, att grammatiken bedrives ofta nog som självändamål. Skrivningarna i språk synas ofta mindre avse att vara en övning i att kunna förstå eller begripligt uttrycka sig på det främmande språket än att vara ett slags skriftligt förhör på den eller den regeln, därav de många underliga »fallgroparna».

En dyrbar tid slösas sålunda bort på dylika värdelösa petitesser. Lägges språkundervisningen i realskolan om efter rent praktiskt behov, och beaktas skolkommissionens synpunkter, så torde det mesta av den behövliga tiden för den naturvetenskapliga undervisningen kunna vinnas.

Några av mikrokemins medel och metoder.

Av KARL JOSEPHSON.

Få arbetsområden inom kemin kunna under de senaste 15—20 åren uppvisa en så stark utveckling som mikrokemin. Även om början av mikrokemins utveckling till ett specialområde inom kemin kan återföras till 1860- och 1870-talen, så är det dock först under senare tid som utvecklingen nått därhän, att de mikrokemiska metoderna, och speciellt de mikroanalytiska, i fråga om fulländning och noggrannhet fullt kunna mäta sig med eller till och med överträffa de äldre för större substansmängder utarbetade makrometoderna. Särskilt inom den kemiska analysens område har man alltmera insett betydelsen av att kunna använda även mycket små substansmängder för exakta kvalitativa och kvantitativa kemiska undersökningar, och ej endast då dyrbarheten eller sällsyntheten av materialet förhindrar användandet av så stora mängder substans, som erfordras för en makroanalytisk undersökning, ha numera mikrometoder fått en vidsträckt användning. Utvecklingen går nog i den riktningen, att de äldre metoderna, vid vilka ej endast avsevärda mängder av det material, som skall undersökas, förbrukas vid analysen, utan även en längre arbetstid är behövlig, mer och mer kompletteras eller ersättas av nya i flera avseenden mer ekonomiska mikrometoder.

Såväl vid vetenskapliga arbeten som i vissa fall även inom den kemiska industrin ha redan de mikrokemiska metoderna vunnit en allt större spridning, och sedan några år hållas vid österrikiska och tyska liksom schweiziska

universitet regelbundna föreläsningar och övningar i mikrokemi; på många håll har även universitetsundervisningen i organisk elementaranalys kompletterats (eller ersatts) med kurser i kvantitativ organisk mikroanalys.

I det följande skall jag i korthet redogöra för några data från mikrokemins utveckling och därefter beskriva några av de viktigare metoderna inom mikrokemin, varvid jag främst kommer att uppehålla mig vid de av nobelpristagaren Fritz Pregl utarbetade metoderna för kvantitativ organisk mikroanalys.

Bland de sedan länge inom kemin använda undersökningsmetoderna finnas åtskilliga, vilka kunna innefattas under begreppet mikrometoder. Hit höra t. ex. kolorimetrin och nefelometrin, vilka som bekant grunda sig på jämförelse mellan färgningen av ett ämne i en lösning, resp. grumlingen av en fint suspenderad fällning, med en jämförelselösning av känd halt. Även många andra speciellt fysikaliskt-kemiska metoder, såsom de spektralanalytiska och användningen av elektrometern för undersökning av radioaktiva ämnen, kunna hänföras till mikrokemins arbetsområde, i det att det ju även i dessa fall är fråga om undersökning av mycket små substansmängder.

Som jag inledningsvis nämnde, kan man räkna uppkomsten av en speciell mikrokemi till 1860- och 1870-talen. Dessa tidigare metoder äro grundade på användningen av mikroskopet för iakttagande av kristallbildning och karakteristiska reaktioner vid inverkan av olika reagens på mineralier. Sedan omkring 1880 olika författare beskrivit en och annan mikrokemisk reaktion, utgav Haushofer, som ävenledes offentliggjort flera avhandlingar av mikrokemiskt innehåll, sitt arbete »Mikroskopische Reaktionen» 1885. Här, liksom i ett av fransmännen Klement och Renard 1886 utgivet arbete, kommer den tanken till uttryck att använda mikrokemiska metoder för den analytiska undersökningen av alla element.

Viktiga framsteg gjorde mikrokemin genom H. Behrens, som redan 1881 och 1885 framlade grunderna för den rikt-

ning av den kvalitativa mikroanalysen, som sedan fått en allmännare utbredning. Av Behrens föreligger bl. a. arbetet »Anleitung zur mikrochemischen Analyse» (1894 och 1899), behandlande oorganiska ämnen, samt »Anleitung zur mikrochemischen Analyse organischer Stoffe» (1895—1897). Behrens' arbeten ha fortsatts av hans lärjunge Kley, som 1915 och 1922 utgivit nya upplagor av ovannämnda verk. Av Schoorl föreligger arbetet »Beiträge zur mikrochemischen Analyse» (1909).

De viktigaste namnen inom mikrokemins utvecklingshistoria äro dock Friedrich Emich och Fritz Pregl, vilka båda genom sina arbeten verkat banbrytande för mikrokemins utveckling och grundlagt den moderna mikrokemin.

I sin »Lehrbuch der Mikrochemie» (1:a uppl. 1911, 2:a uppl. 1926) har Emich redogjort för olika kvalitativa reaktioner på såväl oorganiska som organiska ämnen. Man finner här också redogörelser för kvantitativa mikrokemiska reaktioner. Då denna bok dessutom också innehåller beskrivningar över allmännare mikrokemiska metoder och för mikrokemins ändamål speciellt konstruerade apparater, är den nya upplagan av Emichs »Lehrbuch der Mikrochemie» ovärderlig för var och en, som vill närmare lära känna mikrokemins medel och metoder. Synnerligen läsvärd är även den mindre, mer för praktiken avpassade »Mikrochemisches Praktikum» (1924) av Emich.

Vad avgränsningen av den kvantitativa mikroanalysen från makroanalysen beträffar, så torde man kunna räkna alla sådana metoder, vid vilka det rör sig om analys av substansmängder av storleksordningen 10 mg eller därunder, till mikroanalysens område. Det är ofta vanligt att benämna de metoder, vid vilka substansmängden utgör 20-50 mg, »halv-mikrometoder». Vid de av F. Pregl utarbetade metoderna för t. ex. kol- och vätebestämning eller kvävebestämning av organiska ämnen användas i allmänhet substansmängder av storleksordningen 2-5 mg organisk substans.

Som bekant brukar man inom området för vanlig kvantitativ analys i allmänhet räkna med, att vägningsfelen vid vägning av substansmängder av storleksordningen 0,1—1 g ej äro större än 0,1—0,5 mg, alltså en noggrannhet av storleksordningen 1 ‰. En lika stor noggrannhet vid vägning av t. ex. endast 2 mg förutsätter ju ett vägningsfel av högst 0,002 mg. För möjliggörande av den kvantitativa mikroanalysens utveckling var det således nödvändigt att konstruera en analysvåg med tillräckligt hög känslighet, på samma gång som dess användbarhet ej fick vara inskränkt på grund av för låg tillåten maximalbelastning. Tidigare hade den av NERNST konstruerade kvartsvågen kommit till användning vid mikrokemiskt arbete. Denna kvartsvåg besitter visserligen en tillräckligt hög känslighet, men just på grund av den ringa maximalbelastningen och vidare på grund av att man på densamma endast kan väga föremål med en helt ringa utsträckning är denna vågs användbarhet alltför begränsad.

Den första våg, som med bibehållen hög maximalbelastning kunde uppvisa en sådan känslighet, att noggrannheten vid vägning av »mikrokemiska» substansmängder var av ovan angiven storleksordning, var den av W. KUHLMANN i Hamburg konstruerade s. k. »Probierwage». Redan denna våg, som Emich tidigt använde vid sina mikrokemiska arbeten, tillät, såsom Pregl har funnit, uppskattningen av $^1/_{1000}$ mg vid vägning av föremål ända upp till maximalbelastningen 20 g. Denna våg var föregångaren till den på Pregls initiativ av Kuhlmann konstruerade mikrovåg, som byggts speciellt för den kvantitativa organiska mikroanalysens behov.

Hos denna Kuhlmanns mikrovåg, som till sin konstruktion principiellt ej skiljer sig från vanliga analysvågar, motsvarar varje delstreck av tungans skala 0,01 mg. Genom uppskattning av bråkdelar av skaldelar vid tungans utslag kan man således med detta instrument (vid riktigt handhavande och efter någon övning) utan svårighet uppnå en noggrannhet av $\pm$ 0,001 mg vid vägningen. Utmärkande

för Kuhlmanns mikrovåg liksom även för de större modellerna av hans analysvågar är den konstanta känsligheten oberoende av belastningens storlek. Ännu vid maximalbelastningen 20 g motsvarar således ett delstrecks utslag av tungan 0,01 mg, och då man vid vägningen uppskattar bråkdelarna av utslaget, motsvarar detta en känslighet av 10^{-7}. En sådan mikrovåg torde alltså med hänsyn till användningsområdet överträffa alla andra instrument, med vilka viktskillnader av 1-2 tusendels milligram kunna bestämmas. Angående handhavandet av vågen och de försiktighetsmått, som måste iakttagas, främst för förhindrande av nollpunktsförskjutningar, måste hänvisas till Pregls monografi »Die quantitative organische Mikroanalyse» (2:a uppl. 1923, sid. 8-18).

I detta sammanhang vill jag även framhålla, att ehuru de flesta kvantitativa mikrometoder till stor del kunna betraktas som »förminskade» makrometoder, så kan man i allmänhet ingalunda utföra en mikroanalys uteslutande med de erfarenheter, som gjorts vid den motsvarande med större substansmängder utförda makroanalysen, som ledning. Så är det ju t. ex. vid en vanlig makrobestämning tillräckligt, om en degel med kanske 10 grams vikt har en viktskonstans av 0,2 mg; vid motsvarande mikrometod måste en degel av kanske halva vikten om möjligt ha en viktskonstans av 0,002 mg. Förhållandet vid mikrometoden är i sådant fall $4 \cdot 10^{-7}$ mot $2 \cdot 10^{-5}$ vid makrometoden.

De mest bekanta och allmännast använda mikroanalytiska metoderna äro de av österrikaren Fritz Pregl utarbetade metoderna för kvantitativ mikroanalys av organiska ämnen. Efter långvariga undersökningar hade Pregl 1910 kommit fram till en organisk substans, vars undersökning enligt de då föreliggande analytiska metoderna omöjliggjordes på grund av att substansen ej erhållits i tillräcklig mängd. Han hade då att välja på att antingen söka framställa substansen i större mängder eller också att förfina analysmetoderna därhän, att de kunde användas för analysen, eller med andra ord att utarbeta metoder för

en kvantitativ organisk mikroanalys. Pregl valde då det senare alternativet, vilket val otvivelaktigt blivit till allra största gagn för den kemiska vetenskapen.

Pregls första försök att utarbeta användbara metoder för kvantitativ bestämning av kol och väte samt kväve i 2-5 mg organisk substans ledde snart till önskat resultat, i det att efter föga mer än ett år fullt användbara metoder förelågo för bestämningen av de nämnda grundämnena på mikroanalytisk väg. Dessutom hade han redan vid denna tidpunkt även utarbetat metoder för mikrobestämning av svavel och halogen enligt samma grunder som komma till användning vid de välkända makrometoderna enligt Carius. Sedan dess ha ej blott dessa metoder förbättrats och delvis rätt avsevärt omändrats eller såsom i fråga om halogen- och svavelbestämningen ersatts med helt nya, utan även andra mikroanalytiska metoder ha i Pregls institut utarbetats och omsorgsfullt prövats, innan de framlades i monografin »Die quantitative organische Mikroanalyse» (1:a uppl. 1917, 2:a uppl. 1923).

Pregls mikrometoder, vilkas stora betydelse för den organiska liksom för den fysiologiska kemin klart inses, omfatta sålunda ej endast kol- och vätebestämning, kvävebestämning samt svavel- och halogenbestämning, utan härtill komma de i många fall så värdefulla metoderna för bestämning av metoxyl- och metylimidgrupper, bestämning av metaller i salter av organiska syror, bestämning av karboxylgrupper genom mikrotitration, mikroelektrolytisk bestämning av koppar, mikromolekylarviktsbestämning enligt kokpunktsmetoden. Av Pregls medarbetare H. Lieb ha utarbetats metoder för fosfor- och arsenikbestämning.

För kol- och vätebestämningen användes ett förbränningsrör av svårsmält jenaglas med en längd av c:a 40 cm och en yttre diameter av c:a 1 cm. Den främre änden av förbränningsröret är utdragen till ett finare rör av 2 cm längd och en yttre diameter av 3—3,5 mm; till detta finare rör skall den gummiligatur, som förbinder förbränningsröret med absorptionsapparaterna för vatten (klor-

kalciumrör) och kolsyra (natronkalkrör), vara avpassad. Vid kol- och vätebestämningen kunna endast sådana gummiligaturer användas, som undergått en särskild process, vilken består i genomledande av luft vid en temperatur av 100° under en timmes tid. Färska gummislangar avgiva nämligen vid genomledande av luft eller syre gasformiga ämnen i sådana mängder, att kol- och vätevärdena vid mikroanalysen utfalla för höga. Vid den beskrivna, av Pregl införda, konstgjorda föråldringsprocessen befrias emellertid gummit från sådana lättflyktiga kolväten.

Fyllningen i förbränningsröret vid kol- och vätebestämningen består av en för alla substanser användbar universalfyllning. Räknat från den främre utdragna röränden består denna rörfyllning av följande skikt: 1) en tätt stoppad propp av Gooch-degelasbest (s. k. bromspropp), 2) ett löst stoppat skikt av blysuperoxidasbest (2—2,5 cm), 3) ett c:a 3 cm långt skikt av silvertrassel, avgränsat av mindre asbestproppar, 4) en blandning av kopparoxid och blykromat (14 cm), 5) ett 2,5—3 cm långt skikt av silvertrassel, skilt från kopparoxid-blykromatskiktet med en mindre asbestpropp. Den s. k. bromsproppen av asbest skall vara tätare stoppad än de övriga skikten; härigenom vinner man, att bromsproppen erbjuder det största motståndet för gasgenomgången genom röret. Tack vare denna anordning samt genom anbringandet av den s. k. Mariottes flaska, genom vilken ett undertryck åvägabringas framför absorptionsapparaterna, samt tryckregleraren, som åstadkommer ett konstant tryck av det tillförda syret resp. luften från gasometrarna, erhåller man en konstant gasströmningshastighet, d. v. s. vid bromsproppen passera på lika tider alltid samma gasmängder. Mellan förbränningsröret och tryckregleraren är inkopplat ett U-rör, som är förbundet med en blåsräknare för kontroll av gasströmningshastigheten samt tjänstgör som torkapparat för syrgasen och luften, som inkommer i förbränningsröret.

Vid kol- och vätebestämningen inväges substansen i ett platinaskepp, vilket placeras i förbränningsröret, så att

främre kanten av skeppet befinner sig på 1—1,5 cm avstånd från rörfyllningens början. Förbränningen utföres i syrgasström. Det skulle föra för långt att här redogöra för själva förbränningens genomförande och för de försiktighetsmått, som man har att iakttaga främst med avseende på förbränningshastigheten eller den hastighet, med vilken syret och efter själva förbränningens slut luften från gasometrarna får passera genom förbränningsröret. Vid iakttagande av den rätta genomströmningshastigheten, vilken kontrolleras med hjälp av den ovan nämnda blåsräknaren och Mariottes flaska, tager hela kol- och vätebestämningen inklusive vägningen av absorptionsapparaterna en tid av endast 50—60 minuter. Vid riktigt genomförda förbränningar äro de erhållna kolvärdena oftast så gott som teoretiska; vätevärdena utfalla ofta liksom vid makrobestämningen något för höga (0,1—0,2 %).

Vid mikrobestämningen av kväve enligt Dumas-Pregl användes ett förbränningsrör av samma slag som vid kol- och vätebestämningen. Rörfyllningen består av kopparoxid och ett skikt reducerad koppar. Den reducerade kopparn har Pregl placerat i mitten av rörfyllningen mellan två skikt kopparoxid; härigenom vinnes, att den koloxid, som kan förefinnas i gasblandningen efter passagen förbi den glödande metalliska kopparn, före utträdet ur förbränningsröret ånyo av kopparoxiden uppoxideras till koldioxid. Denna modifikation av rörfyllningen torde även vid makroförfaringssättet kunna vara av en viss betydelse. Förbränningen utföres liksom vid den vanliga makrobestämningen av kväve enligt Dumas i koldioxid-atmosfär. Koldioxiden tages enligt Pregl lämpligen från en Kipps apparat, vilken tack vare särskilda enkla konstgrepp lämnar en luftfri koldioxid, så att »mikroblåsor» erhållas i azotometern. Den främre till ett finare rör utdragna röränden är medelst passande gummiligaturer och ett särskilt vinkelböjt kranrör, med vilket kolsyreströmmens hastighet noga kan regleras, förbunden med »mikro-azotometern». I denna uppsamlas kvävet över 50-procentig kalilut, som genom be-

handling med baryt gjorts fullständigt skumfri. Mikro-azotometern har ett mätområde upp till 1,2 eller 1,5 cm^3. Skalan är indelad i hundradels kubikcentimeter och tillåter uppskattning av volymen med en noggrannhet av 0,001 cm^3, i det att bråkdelar av skaldelar kunna uppskattas med en lupp, som är förskjutbar utmed skalan. För kvävebestämningen inväges substansen i ett särskilt vägrör och blandas med fin kopparoxid, innan den införes i förbränningsröret. Liksom vid kol- och vätebestämningen gäller det även vid kvävebestämningen, att förbränningen måste utföras långsamt; likaså måste det efter förbränningen följande överförandet av kvävet till mikro-azotometern ske med en långsam kolsyreström, som regleras så att högst en gasblåsa varannan sekund inkommer i mikro-azotometern. Vid större hastighet erhållas nämligen för höga kvävevärden. Vid beräkningen av analysresultatet har man att iakttaga, att den avlästa gasvolymen måste minskas med 2 %; denna differens motsvarar enligt Pregl den volym, som upptages av den kalilut, som vidhäftar gasrummets väggar.

Medan de först av Pregl utarbetade metoderna för bestämning av halogen och svavel på mikroanalytisk väg grundade sig på den organiska substansens förbränning med salpetersyra enligt Carius, äro de nyare metoderna grundade på substansens förbränning i syrgasström vid närvaro av platina som katalysator. Härvid upphettas den i ett platinaskepp invägda substansen i en långsam syrgasström, vilken sedan ytterligare ledes över glödande platina, innan förbränningsgaserna absorberas av absorptionsvätskan (natriumbisulfithaltig sodalösning vid halogenbestämning, c:a 6-procentig vätesuperoxidlösning vid svavelbestämning). För förbränningens och absorptionens genomförande har Pregl konstruerat ett särskilt förbränningsrör, s. k. pärlrör, i vilket de nämnda absorptionsvätskorna införas genom uppsugning i den med porslinskulor försedda främre delen av röret. Härigenom vinnes, att förbränningsgaserna passera absorptionsvätskan under långvarig beröring med densamma, samtidigt som mängden av absorp-

tionsvätskan kan nedbringas till ett minimum. Efter förbränningens slutförande urspolas pärlröret tre gånger med vatten, varefter halogenen resp. svavlet bestämmes i lösningen, vars volym endast uppgår till c:a 30 cm^3, genom fällning som halogensilver resp. bariumsulfat. För uppsamlingen av halogensilvret användes ett s. k. filtrerrör med ett asbestskikt som filter, varvid halogensilvret överföres i filtrerröret genom en särskild hävertliknande suganordning. Bariumsulfatet uppsamlas och glödgas i en liten Neubauer-platinadegel med platinafiltrum.

Den av Lieb utarbetade metoden för fosforbestämning på mikrokemisk väg grundar sig på direkt vägning av fosforn såsom ammonium-fosformolybdat efter molybdatets torkning med alkohol och eter. Ursprungligen utförde Lieb förbränningen av den organiska substansen i syrgasström efter substansens blandning med soda och salpeter i ett platinaskepp. Då denna metod är något omständlig och fordrar ett särskilt överförande av smältan från platinaskeppet i ett annat kärl, i och för fällning med molybdatreagenset, har författaren tillsammans med K. Sjöberg undersökt möjligheten att förbränna substansen direkt i fällningskärlet med koncentrerad svavelsyra och vätesuperoxid. Denna enkla metod (ungefär samtidigt ha Lieb och Wintersteiner även prövat denna förbränningsmetod för fosforbestämning, ehuru de icke utföra förbränningen i samma kärl som fällningen) har visat sig synnerligen användbar och synes helt kunna ersätta det äldre förbränningssättet. Efter förbränningen och tillsats av salpetersyra fälles med Lorentz molybdatreagens; fällningen överföres på samma sätt som halogensilvret vid halogenbestämning i ett filtrerrör, tvättas med alkohol och eter och väges efter eterns fullständiga avlägsnande i vakuumexsiccator. På grund av ammoniumfosformolybdatets höga vikt och den därav betingade synnerligen fördelaktiga fosforfaktorn kan molybdatfällningen vägas på en vanlig analysvåg, då en noggrannhet av 0,1 mg är tillräcklig. Mikrofosforbestämningar kunna således utföras utan användande av mikrovåg.

Jag skall här inte upptaga mer plats för beskrivning av övriga av Pregl och hans medarbetare utarbetade metoder, utan de redan i korthet beskrivna metoderna få vara nog för att visa några av de möjligheter, som den moderna mikroanalytiska kemin besitter. I en nyligen publicerad uppsats i tidskriften »Mikrochemie» ha A. Meixner och F. Kröcker redogjort för några erfarenheter vid användningen av Pregls mikrometoder i ett fabrikslaboratorium, nämligen vid I. G. Farbenindustrie A.-G., Höchst am Main. Författarna säga här angående dessa metoder: »Es sei vorausgeschickt, dass sie sich seit ihrer Einführung vor fünf Jahren in unserem organisch-analytischen Laboratorium in vielen Tausenden von Analysen vorzüglich bewährt hat durch ihre Sicherheit, Genauigkeit und Substanzersparnis, die einerseits auch bei uns erst viele Arbeiten ermöglicht hat und anderseits durch Verkleinerung von wertvollen Ansätzen bei systematischen Arbeiten auch indirekt zu grossen Ersparnissen führte.»

Till mikrokemins gränsområden kunna räknas de speciella gebit av exempelvis botaniken, medicinen, metallografin etc., i vilka kemiska mikrometoder komma till användning. Sammanfattande arbeten, som behandla sådana speciella fack, finnas utgivna bl. a. av Molisch (Mikrochemie der Pflanze, 2:a uppl. 1921), Tunmann (Pflanzenmikrochemie, 1913), Ivar Bang (Mikromethoden zur Blutuntersuchung), Pincussen (Mikromethodik, Quantitative Bestimmung der Harn- und Blutbestandteilen in kleinen Mengen, 1921), Rosenbusch-Wülfing (Mikroskopische Physiographie d. petrographisch wichtigen Mineralien). Ett område, som behandlats mikrokemiskt av A. Krogh, är gasanalysen. I det bekanta verket Handbuch der biochemischen Arbeitsmethoden, utgivet av E. Abderhalden, finnes en redogörelse för dessa metoder (band 8, sid. 495, 1915).

Slutligen är att tillägga, att den starka utvecklingen av mikrokemin under senare år även haft till följd, att en särskild tidskrift, som uteslutande ägnats åt mikrokemiska

och mikrofysiska frågor, utgives av några av de ledande mikrokemisterna i Österrike, det land varifrån de flesta och mest betydelsefulla resultaten på mikrokemins område härstamma. I denna tidskrift, »Mikrochemie», införas såväl originalavhandlingar som referat av i andra tidskrifter publicerade arbeten av mikrokemiskt innehåll.

Stockholms Högskola, augusti 1927.

Luftens sammansättning. Ett laborationsförsök i kemi i klass 5.

Av BROR GUSTAVER.

Det av lektor Moll i »Kemiska laborationsövningar för realskolans 5:e klass» beskrivna försöket att bestämma luftens sammansättning är förknippat med felkällor, som göra det svårt att erhålla noggranna värden. Vid de laborationer, som förf. lett och där detta försök utförts, ha värdena på luftens syrehalt varierat betydligt; mycket ofta ha värden på över 25 % erhållits, ibland t. o. m. över 30 %.

För små värden bero vanligen därpå, att järnpulvret ej varit ordentligt antänt utan slocknat, innan allt syre förbrukats. Har däremot järnpulvret kraftigt upphettats med en låga, blir luften i cylindern hastigt uppvärmd och utvidgar sig, så att luftblåsor tränga ut under cylinderns kant. I stället tränger vatten in, och man får ett för stort värde på den försvunna luftens volym.

En alldeles oberäknelig felkälla ligger däri, att laboranterna i rädsla att stöta omkull det rankiga koppartrådsstativet, dröja för länge med att ställa ned cylindern i vattnet i skålen, medan de föra den ned över det brinnande järnpulvret. Luften utvidgas, varav följden, såsom redan framhållits, blir för stora värden på den försvunna luftens volym. Men en del av syret inuti cylindern har under tiden hunnit förena sig med järnpulvret, så att syrehalten hos den luft, som finns i cylindern, när denna ställes ned i vattnet i skålen, är mindre än den rätta, och ett för litet värde erhålles. Det beror därför av en ren slump, om man får ett riktigt värde på luftens syrehalt.

Då laboranterna för att undvika den sistnämnda oberäkneliga felkällan hastigt stjälpa cylindern över det brinnande järnpulvret, erhålla de nästan alltid för stora värden (under förutsättning, att pulvret varit ordentligt antänt). Utför man försöket långsammare, bli resultaten bättre, men då mera på grund av tur än skicklighet.

Försöksanordningen kan emellertid lätt ändras, så att den ena av de nu påvisade felkällorna faller bort och den andra endast blir obetydligt störande. I stället för att stjälpa en cylinder över ett stativ med brinnande järnpulver för man ned detta i en glasburk med vid öppning och sluter därvid samtidigt till öppningen med en tät kork. En glasburk av 200 à 250 cm^3 volym *med avsprängd botten* ställes i en flat skål med vatten, så att detta når upp 1 à 1,5 cm i burken, och ett trådmärke sättes vid vätskeytan. Vid korken, som måste sluta tätt i burkens mynning, fästes på undersidan en koppartråd av lagom längd, som nedtill är hopböjd till en vågrät ring av högst en 2-örings storlek. På denna lägges som i det Mollska försöket ett stycke mässingtrådnät, som bildar en liten skål för järnpulvret. Detta tändes på en låga, varefter korken så hastigt som möjligt sättes i burken. Luften utvidgas först något men kan ej tränga ut, tack vare vattenspärren. Samtidigt med att vattnet sedan stiger i burken häller man i mera vatten i skålen, så att vattenytorna inuti och utanför stå lika högt (härigenom undvikas fel, beroende på otäthet hos korken). Då vattnet slutat att stiga och burken kännes kall utanpå, sättes ett andra trådmärke vid vattenytans nya läge. Ett tredje trådmärke sättes vid korkens undre yta. Korken tages nu ur och man undersöker luften inuti burken med ett brinnande ljus, som doppas ned däri. Ljuset slocknar, och därmed är visat, att den kvarvarande luften ej kan underhålla förbränning. Sedan mätas volymerna till trådmärkena och syrehalten räknas ut.

Vid en laborationsövning, som förf. företagit enligt den nu beskrivna metoden erhölls följande värden på luftens syrehalt i procent: 23,9; 22,5; 21,5; 21,1 19,5; 19,0; 18,8;

18,1. Medeltalet är 20,6 %. Ett par av laboranterna måste utföra försöket två gånger, emedan järnpulvret var dåligt antänt och slocknade, innan allt syre förbrukats.

Burkar med avsprängd botten om 250 cm^3 volym ha inköpts från Rudolph Grave, *Stockholm*, till ett pris av 1,25 kr. per styck.

Beskrivande uppgifter, givna i den skriftliga studentexamen i fysik.

V.T. 1910. Redogör för belltelefonens konstruktion och förklara dess verkningssätt.
H.T. 1910. Knallgasvoltametern, dess princip och användning.
V.T. 1911. Redogör för spektroskopets konstruktion.
H.T. 1911. Luftens fuktighet och dess bestämmande.
V.T. 1912. Redogör för någon metod att bestämma värmets arbetsekvivalent.
H.T. 1912. Tangentbussolen, dess konstruktion, teori och användning.
H.T. 1921. Beskriv blyackumulatorns konstruktion och verkningssätt och angiv några användningar av densamma.
V.T. 1922. Angiv de viktigaste egenskaperna hos de två slagen av transversell vågrörelse, den fortskridande och den stående.
H.T. 1922. Beskriv några metoder att bestämma luftens fuktighet.
V.T. 1923. Redogör för det absoluta måttsystemets grundprinciper och för enheterna för kraft, effekt och elektrisk strömstyrka.
H.T. 1923. Hur bestämmes en tons svängningstal?
V.T. 1924. Redogör för de karakteristiska egenskaperna hos mättade och omättade ångor.
H.T. 1924. Redogör för olika slag av spektra.
V.T. 1925. Beskriv, hur man går till väga för att bestämma ett ämnes smältvärme.
H.T. 1925. Redogör för Mayers beräkning av den mekaniska värmeekvivalenten.
V.T. 1926. Redogör för olika slag av instrument för mätning av elektriska strömmars styrka.

H.T. 1926. Angiv villkoren för att ett galvaniskt element skall vara polarisationsfritt och beskriv några element, som uppfylla dessa villkor.

V.T. 1927. Huru bestämmas elektromotoriska krafter och potentialdifferenser?

I den mest använda samlingen av studentuppgifter i fysik (Norstedts förlag) saknas de beskrivande uppgifterna. Det har därför ansetts lämpligt att i tidskriften införa ovanstående förteckning. Det ser nämligen ut, som om vi numera regelbundet hade att vänta dylika uppgifter, och då är det önskvärt att kunna överblicka, vilka ämnen som förut givits.

Såsom av förteckningen framgår, ägde ett längre avbrott rum under åren 1912—1921. Ett nytt avbrott skulle säkerligen hälsas välkommet av flertalet fysiklärare. Abiturienternas behandlingar av dessa uppgifter äro ju oftast synnerligen svåra att rättvist bedöma. Därtill kommer, att de kräva hela fysikkursen genomgången och repeterad till skrivningen, vilket ingen lärare torde medhinna.

Avsikten med de beskrivande uppgifterna har väl varit att betona, att fysik ej enbart är problemräkning, och man har kanske hoppats, att införandet av dylika uppgifter i studentskrivningen skulle lätta det tidskrävande problemarbetet vid förberedelsen till examen. Men den verkan har uteblivit, ty det har ju visat sig, att flertalet elever helst undvika dessa uppgifter; de svagare ha föga hjälp av dem, och för de elever, som aspirera på ett högt betyg, betyda de endast ett ökat repetitionsarbete till skrivningen.

Det säkraste medlet att motverka ett överdrivet problemräknande i fysik är att ej låta studentskrivningarna överskrida en lämplig svårighetsgrad, vilket tyvärr ofta skett. Det kan ifrågasättas, om ej en genomsnittlig förenkling av problemen måste anses påkallad, för att vi skola få tid till att på ett tillfredsställande sätt och utan jäkt medhinna de dryga fysikkurserna. *C. E. Blom.*

Insänd litteratur.

KNUT BOHLIN, *Lärobok i kemi för realskolan och första gymnasieringen*, 4:e upplagan, omarbetad under medverkan av NILS LÖFMAN, C. E. Fritzes förlag, 1927, 131 sid., 4: — kr., häft. 3: — kr.

De flesta läroböcker i kemi sträva efter att så gott som omedelbart efter begreppet kemisk reaktion införa begreppen grundämne och kemisk förening. I samband därmed införas lagarna om viktens oföränderlighet, den konstanta sammansättningen och de multipla proportionerna. Mången lärare torde redan i början av kursen införa atomer och formler. I varje fall införas dessa efter oxidation och reduktion samt några experiment med baser, syror och salter. Därefter behandlas elektrolys, joner och jonreaktioner. Genom denna lärogång uppbygges kemien ur grundämnena som kärna. Huvudvikten kommer att ligga på ämnenas sammansättning och på atomföreställningen, medan man riskerar, att ämnenas egenskaper och sätt att reagera träda något i bakgrunden. Anknytningen till av lärjungarna förut kända ämnen och företeelser måste givetvis komma i efterhand.

En annan lärogång följer den föreliggande läroboken. Kap. I—III omfatta baser, syror och salter jämte något om salters framställning även ur metaller. Kap. IV inför på grundval av kvicksilveroxidens sönderdelning och koldioxidens bildning begreppen grundämnen och kemisk förening. Kap. V och VI behandla luften och vattnet. Kap. VII och VIII ägnas åt binära föreningar och åt oxidation och reduktion. Efter ett kapitel om »jordskorpan», som även innehåller en knapphändig framställning om mal-

mernas utnyttjande, följer så i kap. X mängdlagar för kemiska föreningar samt i kap. XI atomvikt och molekylvikt, dock med konsekvent undvikande av någon antydan om atomer och molekyler och följaktligen utan förklaring av ordens verkliga betydelse. I denna del får framställningen därför delvis karaktären av fristående stycken utan organiskt sammanhang. Till följd av den lärogång författaren valt kräves nu en förnyad framställning av de i början av kursen genomgångna ämnena. Denna följer i kap. XII om basers, syrors och salters elementära sammansättning. Kap. XIII om elektrolyter börjar icke med elektrolys. I stället vill författaren suggerera fram den föreställningen, att i t. ex. en kopparsulfatlösning finnas två ämnen, eftersom man kan visa på två grupper av reaktioner, och han inför för dessa »ämnen» namnen kopparjon och sulfatjon. Det för kopparjonen karakteristiska skulle vara den blåa färgen. Då emellertid det av lärjungarna kända kopparsulfatet i kristallform också är blått, avfärdas detta för säkerhets skull i början av stycket såsom oegentligt. Det *egentliga* kopparsulfatet är det vita pulvret, som är vattenfritt. Här skulle man ha lust att fråga, om det inte möjligen kunde vara vattnet, som ger färg åt kopparn, eftersom kristaller och lösningar ha snarlik färg. Författarens framställning är kanske som uppslag betraktad behändig, men den är ohistorisk och förefaller mig konstlad. Det finnes ju andra atomgrupper (jag tänker på den organiska kemien), som ha karakteristiska reaktioner. Deras gamla namn är radikaler, och författarens »jon» är nog inte just något annat. Med reservation för lärogången i denna punkt vill jag dock erkänna, att om man på detta sätt inpräntat dissociationen som ett »faktum», så blir det en lätt sak att närmare reda ut fenomenen vid elektrolys. I samband med denna går författaren även in på en kvantitativ definition av jonladdningen men håller sig därvid såvitt möjligt fri från varje konkret föreställning. Han inför begreppen ampère och coulomb och kommer till att 1 g vätejon är bärare av 96 500 coulomb. Faradays lag genomgås experi-

mentellt. Härefter förklaras några elektrolytiska sönderdelningar med formler (jämte tecken för jonladdningen). Om denna avdelning måste sägas, att den förefaller alltför svår. Att försöka införa joner som fria och laddade ämnen i en lösning utan att införa föreställningen om materiens diskontinuitet är nog inte lönt. Den pojke, som, om han lärt sig litet fysik, låter inbilla sig, att två positivt och negativt laddade ämnen simma omkring i en vattenlösning, han har alldeles för stor respekt för sin magister för att hysa den rätta nyfikenheten.

Två förtjänstfulla stycken om neutralisationsvärme och hydrolys utgöra den oorganiska delens avslutning. Det följer visserligen en sida om atomteorien, men den hör icke tillsammans med framställningen i övrigt.

Som synes avviker lärogången i Bohlins lärobok från den i svenska läroböcker eljest brukliga, och det är svårt för en lärare, som varit van vid en annan tankegång att vara rättvis vid ett avvägande av bokens förtjänster och nackdelar. För min del uppskattar jag till fullo de inledande kapitlen I—VIII. När författaren börjar med baser, syror och salter, följer han den historiska och följaktligen naturliga utvecklingen, och särskilt genom att icke genast bråka med ämnenas sammansättning vinner han den för realskolans elever viktiga fördelen, att de samla en erfarenhet, som de verkligen kunna tänkas ha glädje av. Ämnenas sammansättning är för vanligt folk bra mycket mindre viktig än deras egenskaper och sätt att reagera. I samband med saltbildning införde författaren i tidigare upplagor begreppet ekvivalenta mängder, och det tilltalade mig mycket. Denna framställning har nu sammanförts med ett senare avsnitt om ekvivalentvikter. Detta avsnitt har gjorts fylligt och överskådligt. I denna punkt synes mig boken vida överlägsen andra framställningar. Ekvivalentvikten synes i allmänhet hava skjutits väl mycket åt sidan vid undervisningen, och dock är detta begrepp icke blott det historiskt tidigaste av alla kvantitativa begrepp utan också det påtagligaste. Det är ju också alldeles fritt från hypoteser.

Till införande av begreppet grundämne har författaren valt kvicksilveroxidens sönderdelning. Men eftersom författaren förut behandlat kalksten, kalk och kolsyra, borde det ur författarens egen synpunkt ha fallit sig naturligare att utgå från dessa ämnen. Man kan ju visa, att kalksten är en förening av kalk och kolsyra. Dessa i sin tur äro föreningar av kalcium och syre, respektive kol och syre. Men dessa senare kunna icke vidare påvisas vara föreningar och kallas därför grundämnen. Jag vet av erfarenhet, att denna lärogång är möjlig att genomföra.

Svårare är det att i allo gilla den oorganiska delens senare hälft omfattande mängdlagar, formler, elektrolys och den elektrolytiska dissociationen. Jag undantar därvid framställningen av ekvivalentvikter, som synes mig vara bokens bästa parti. Det kan erkännas, att den väg författaren följer, att nämligen med bortseende från atomteorien definiera atomvikter och molekylvikter såsom vikten av en viss volym av en gas eller såsom ekvivalentvikten eller en multipel därav, är ur formell synpunkt oantastlig. Men vad är det, som är grunden för dessa begrepp? Är det icke atomen och endast atomen som ger innehåll och sammanhang åt dessa mängdlagar? Låt oss, med bortseende från det antikverade häri, för ett ögonblick acceptera författarens åsikt, att atomen endast är en »metafysisk» föreställning. Hur har man historiskt sett kommit att uppställa dessa lagar? Har man funnit dem först och sedan uppställt atomteorien? Nej. Lagen om viktens oföränderlighet ligger oss egentligen i blodet,[1] och så förhöll det sig också med de tidigare kemisterna (phlogistonteorien utgår från samma lag). Om jag i ett slutet kärl utför en fällningsreaktion och frågar, om vikten förändrats, skall ett av kunskap oförvillat sinne helt visst förbluffas över en sådan fråga. Lagen om de konstanta proportionerna, som vi nu betrakta som en erfarenhetssats, förnekades av Berthollet, och den tillämpades faktiskt av Dalton och hans anhängare, innan den var experimentellt

[1] A. E. Holleman, Lehrb. d. unorg. Chemie (1908), s. 17.

fastslagen, därför att atomteorien fordrade det. Det fanns en tid, före Dalton, då lösningar, legeringar och glas, betraktades som kemiska föreningar och då t. o. m. luften betraktades som en »lös» förening. Och lagen om de multipla proportionerna »upptäcktes» ganska säkert av Dalton på spekulativ väg. Hans egna analyser voro få och föga tillfredsställande. Den experimentella bekräftelsen följde senare genom Berzelius. Man framställer ofta utvecklingen, som om Dalton på grund av de kemiska erfarenhetssatserna om viktens oföränderlighet, de konstanta och multipla proportionerna skulle uppställt sin atomteori. Detta är ohistoriskt. Atomen fick Dalton till skänks av fysikerna. Han säger själv (i en föreläsning 1810): »Newton had demonstrated clearly — — — that an elastic fluid is constituted of small particles or atoms of matter which repel each other by a force increasing in proportion as their distance diminishes.»[1] Daltons betydelse ligger således däri, att han tillämpat en redan befintlig föreställning på ett nytt område och därigenom lagt grunden för den nya kemien, inom vilken atomteorien intill början av detta sekel firat sina allmännast kända triumfer. Atomteorien var till en början en arbetshypotes, javäl, men som sådan bär den nya frukter ännu hundra år efter sin första tillämpning. Och att bygga upp en kemi utan dess förnämsta verktyg, nåja, det kan man nog göra — efteråt — men det blir en bräcklig och löslig byggnad. Författarens ståndpunkt är tydligen den, att kemien skall vara en »fenomenologi», en deskriptiv vetenskap. Jag kan icke dela hans mening. Det kan icke vara riktigt att frigöra skolkemien från det sammanbindande momentet i den verkliga kemiens lärobyggnad, som är en frukt av slutledningar på atomistisk grund, slutledningar som lett till nya upptäckter på laboratoriet lika ofta som laboratoriets upptäckter fört till nya slutledningar. Författaren kunde möjligen i viss mening finna stöd för sin negativa ståndpunkt vid den första upplagans tillkomst, och han har också själv i detta

[1] J. F. Moore, A History of Chemistry (1918), s. 70.

samband åberopat Ostwald, men det var sannerligen i sista minuten, ty några år senare föll även Ostwalds motstånd mot atomteorien.

De flesta av tidskriftens läsare torde nog tycka, att jag ödslar krut på döda hökar i denna angelägenhet. Det torde emellertid observeras, att den föreliggande läroboken är den i sitt slag skönaste frukten av en viss pedagogisk princip. »Kunskapen skall ha en fast grund i erfarenheten» heter det ju, varmed oftast menas den erfarenhet, som vinnes genom omedelbar iakttagelse. Om man säger, att kunskapen skall fotas *uteslutande* på erfarenheten = den omedelbara iakttagelsen, så har man den renodlade princip, som synes vara författarens valspråk och som proklamerats av många andra. Men pedagogiska principer måste rätta sig efter den kunskap, som skall meddelas, d. v. s. efter den kemi, som *är*, och denna har grundats på erfarenhet och fantasi i intim förening, och att det skulle behöva vara annorlunda vid undervisningen, såvida man vill nå utöver det allra första stadiet, har jag mycket svårt att tänka mig. Jag har varit så utförlig, emedan jag vill övertyga författaren själv. Hans i övrigt klara och genomarbetade framställningssätt inger nämligen förhoppning om att han i en kommande upplaga skall, om han vill, kunna omarbeta senare hälften av sin oorganiska kemi till större överensstämmelse med en naturlig utvecklingsgång. I en skicklig — och fordrande — lärares hand utgör säkerligen läroboken en förträfflig förberedelse för fortsatta studier. Såsom självständig lärobok är den nog i sitt nuvarande skick icke lika lämplig.

Några detaljer, som fallit mig i ögonen, må påtalas. Sid. 15 säges, att lösningen av zink i svavelsyra är en »kemisk» lösning. Det har jag aldrig hört. Lösningen innehåller zinksulfat. Uttrycket »fysisk» lösning har jag heller aldrig hört. Sid. 34 framhålles särskilt, att man av blyoxid och kol ej får koldioxid utan koloxid. En prövning visar riklig utveckling av koldioxid. Sid. 36 uppges aluminiums spec. vikt felaktigt till 1,6. Sid. 51 bestämmes i förs. 39 volymen vattenånga, som bildas av knallgas, var-

vid volymen genom räkning reduceras till knallgasens tryck. Enklare och åskådligare är att fylla på kvicksilver, tills höjdskillnaden blir densamma, innan volymen avläses. Sid. 63 i försök 47 påskyndas såsom exempel på katalys zinkens upplösning i svavelsyra medelst platinaklorid. Kopparsulfat gör samma tjänst, och platinans eller kopparns inverkan är icke katalys i vanlig mening, eller behöver åtminstone icke vara det. Sid. 64 betecknas oriktigt salpetersyra som hydroxid till pentoxiden i stället för hydrat, som betyder förening med vatten. Sid. 66 lämnas en förklaring till konc. svavelsyras inverkan på koppar, som strider mot erfarenheten och mot bokens egen framställning. Koppar tillhör icke de vätedeplacerande metallerna, och sid. 69 säger förf. själv med någon överdrift, att konc. svavelsyra icke är någon syra. Förf. skiljer icke på pol och elektrod och har därvid många medsyndare. Det är nog nyttigt att skilja på dem i alla fall. I ett element är t. ex. zinkstavens övre ända negativ pol men den nedre är positiv elektrod, och tänker man på ett elektrolytiskt bad, så sitta polerna på strömkällan, medan elektroderna doppa ned i badet.

Att i en lärobok för realskolans femte klass bestämma luftens syremängd med pyrogallussyra tilltalar mig icke. Försöket med järnpulver ger tillräcklig noggrannhet och är lättare begripligt.

*

Senare delen av läroboken omfattar sjätte klassens kurs i kemi. Den har karaktären av fristående kapitel och innehåller i stort sett det som vanligen torde anses tillhöra denna kurs med den skillnaden, att den kemiska industrien föga beaktats. Det sista kapitlet har till överskrift Kemisk energi och sätter denna i samband med värme, arbete, elektricitet och ljus. Denna del har såvitt jag kan finna endast undergått en lätt retuschering sedan senaste upplagan, och ett utförligt referat synes icke påkallat. För min ringa del finner jag den trevlig.

En fylligare framställning av den för Sverge så viktiga cellulosaindustrien och några andra industrier synes mig önskvärd. Och någon kunskap om de radioaktiva ämnena och atomernas sönderfall borde nog numera räknas till den allmänbildning, som även realskolans abiturienter böra ha tillfälle att inhämta.

Gösta Börjeson.

A. Cleve-Euler och I. Bergh, *Kemien och dess tillämpningar*, I, Allmän och mineralkemi, 2:a uppl. H. Gebers förlag, 1927. 122 sid. Kr. 2: 80.

J. Gabriel Jonsson, *Ekvationer och algebra*, II, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1927. 80 sid. Kr. 1: 90.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

265) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^3 - 5x + 2y &= 0 \\ y^3 + 2x - 5y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

266) Visa att uttrycket

$$na^{n+1} - (n+1)a^n + 1\,,$$

där a och n äro positiva hela tal och $a > 2$, alltid innehåller en kvadratisk faktor > 1. *Iter.*

267) Två sfärer tangera varandra utantill. Visa att den dubbelt skålformiga rotationskropp, som begränsas av tangentkonen och de mot varandra vända sfäriska ytorna, halveras av sfärernas gemensamma tangentplan i tangeringspunkten. *Iter.*

268) F är den ena brännpunkten till en ellips, P en godtycklig punkt på kurvan. Sök sambandet mellan $FP = r$ och normalen $FN = n$ från F mot tangenten i P. *X.*

269) A och B äro två punkter på en cirkel. Att draga de parallella kordorna AA_1 och BB_1, så att deras rektangel får ett givet värde k^2. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

270) Lös ekvationen

$$\sqrt{0{,}5} + \sqrt{x + 2 - \sqrt{6x}} = \sqrt{x - 5{,}5}$$

Svar: $x = 37{,}5$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

271) x är ett helt tal. Man vet att

$$7x - 3 > (x+1)^2 > 5x - 1.$$ Bestäm x!

Svar: $x = 3$.

272) Visa att kuben på varje helt tal kan uttryckas såsom skillnaden mellan kvadraterna på två hela tal.

273) Var ligger felet?

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)$.

Ettorna i början och slutet »taga ut varandra», varav

$s = 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{(2+n)(n-1)}{2}$, vilket icke stämmer vid prövning.

274) Om i en $\triangle ABC$

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1,$$

så är en vinkel 120°.

275) Inskriv i en given triangel en rektangel med uppgiven omkrets.

276) Att finna brännpunkten till en parabel, då man känner läget av vertex, axeln och en normal.

Lösningar till uppg. 231, 238, 239, 240, 241, 242.

231) *Alla sidotrianglar i en tetraeder ha samma yta. Uttryck i en sådan triangels element:*

a) den omskrivna sfärens radie,

b) volymen,

c) höjden mot en sidotriangel.

I dylika tetraedrar äro alla sidoytor kongruenta trianglar, så att motstående kanter äro lika långa och ha gemensamma mittpunktsnormaler två och två; dessa råkas i samma punkt (som är gemensam medelpunkt till de om- och inskrivna sfärerna samt dessutom tyngdpunkten) och

äro vinkelräta två och två. (Se denna tidskr. årg. 7, sid. 76 o. f.) Om $D(ABC)$ är en dylik tetraeder, kunna därför DA, DB, DC uppfattas som de från D utgående diagonalerna till de där sammanstötande sidoytorna i en viss rätvinklig parallellepiped. Låt kanterna i denna vara l, m, n. Då är t. ex.

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= n^2 + m^2 \\ b^2 &= l^2 + n^2 \\ c^2 &= m^2 + l^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$BC = DA = a, \quad CA = DB = b, \quad AB = DC = c.$$

a) Omskrivna sfärens radie R fås omedelbart enl. (1)

$$R^2 = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

b) Tetraederns volym V är $^1/_3$ av parallellepipedens d. v. s.

$$V^2 = \frac{l^2 m^2 n}{9}.$$

Av (1) och *cos*-teoremet fås emellertid

$$l^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc \cos \alpha \text{ etc.},$$

varav

$$V^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{9},$$

där $\alpha = \angle BAC$ etc. *Sidotrianglarna äro alltså spetsvinkliga.*

c) Om T är ytan av en sidotriangel och h betyder tetraederns höjd, får man

$$h^2 = \frac{9V^2}{T^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{T^2} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 16R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

där R är radien i triangelns omskrivna cirkel. *X.*

Även löst av C. A. L. och Iter.

238) *Av siffrorna 1 till och med 9 skola bildas två tal, vilkas produkt är den största möjliga. Vilka äro dessa tal?*

Av misstag tillskriven *X.*, årg. 10, sid. 119.

Tydligt är, att siffrorna i vartdera talet måste vara pla-

cerade i *avtagande följd.* Vidare måste siffrorna vara så placerade, att de vid talens multiplikation *utöva största möjliga effekt,* med andra ord, siffrorna måste vara (i avtagande följd) så placerade, att varje siffra multiplicerar största möjliga tal. De båda största siffrorna måste tillhöra var sitt tal, emedan de annars icke skulle komma att multiplicera varandra. Vi skriva därför siffrorna 9 och 8 i början av var sitt tal och placera därefter de följande siffrorna i avtagande ordning på sådant sätt, att varje siffra multiplicerar det större talet. Då $9 > 8$, måste nästa siffra, som är 7, placeras efter det mindre talet 8, varigenom den nya siffran kommer att multiplicera det större talet 9. Då nu $87 > 9$, måste nästa siffra, som är 6, placeras efter 9 o. s. v. Med tillämpning av samma regel för de följande siffrorna erhållas successivt de båda sökta talen

$$9\,642 \cdot 87\,531 = 843\,973\,902. \qquad \textit{Iter.}$$

239) *Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner den ena katetens projektion på hypotenusan och hypotenusans överskott över den andra kateten.* *Iter.*

Antag $a - b = d$, $c \cos \beta = c_1$. Avsätt åt samma håll styckena $BH = c_1$, $BD = d$, dela BH på förlängningen i D_1 i förhållandet $BD : DH$, dela DD_1 mitt itu i C, och upprita med C till medelpunkt en halvcirkel DAD_1. Normalen i H mot BC skär halvcirkeln DAD_1 i A. Då är ABC den sökta triangeln.

Då BH är delad harmoniskt i D och D_1 och C är mittpunkten på DD_1, så är $CB \cdot CH = \overline{CA}^2$, således $BC : CA = CA : HC$ och således $\triangle BCA \sim ACH$, varav följer, att $\angle BAC$ är rät. Vidare är $BH = c_1$ och $BC - AC = BC - DC = BD = d$.

Möjlighetsvillkor: $c_1 > d > \frac{1}{2}c_1$ (*en* lösning).

Anm. På liknande sätt löses uppgiften att upprita en rätvinklig triangel, då man känner den ena katetens projektion på hypotenusan och *summan* av hypotenusan och den andra kateten. I den förut betraktade figuren är näm-

ligen $BC + CA = BD_1$. Man delar då BH i D i förhållandet $BD_1 : HD_1$, varefter konstruktionen blir densamma som förut. *Iter.*

Även löst av X.

240) *Sök värdet av 1:a icke försvinnande* $f^n(0)$ *för*

$$f(x) = \sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x). \qquad X.$$

Lösning:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \text{termer av högre ordning}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \quad » \quad » \quad » \quad »$$

Om i allmänhet $\varphi(x) = x + px^3 + qx^5 + rx^7 + \ldots.$

och $\psi(x) = x + Px^3 + Qx^5 + Rx^7 + \ldots.$

bli de lägsta termerna i $\psi(\varphi(x))$ tydligen

$$x(1 + px^2 + qx^4 + rx^6) + Px^3[1 + 3px^2 + (3p^2 + 3q)x^4] + \\ + Qx^5(1 + 5px^2) + Rx^7 = x + (p + P)x^3 + (3pP + q + \\ + Q)x^5 + [r + R + 3p^2P + 3(Pq + Qp) + 2Qp]x^7.$$

Låter man p, q och r byta plats med resp. P, Q och R, erhållas de lägsta termerna i utvecklingen av $\varphi(\psi(x))$ och sedan

$$f(x) = \psi(\varphi(x)) - \varphi(\psi(x)) = [3pP(p - P) + 2(Qp - Pq)]x^7 + \ldots.$$

Insätt $P = -\frac{1}{6}$; $Q = \frac{1}{120}$; $p = \frac{1}{3}$; $q = \frac{2}{15}$, så blir

$$\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x) = -\frac{x^7}{30} + \ldots.$$

Sistnämnda funktions lägsta derivata, som ej försvinner för $x = 0$, är alltså den sjunde; dess värde för $x = 0$ är

$$-\tfrac{1}{30} \cdot 7! = -168. \qquad X.$$

241) *På hur många sätt kan talet 100 uppdelas i en summa av tre positiva hela tal?* *Iter.*

Lösning I. Vi låta de tre termerna representeras av var sin av tre kolumner A, B, C. Då varje term är $\geqq 1$, insätta vi först i vardera kolumnen en enhet. De övriga 97 enheterna kunna därefter fördelas godtyckligt med x en-

A	B	C
1	1	1
x	y	z

heter i första, y i andra och z i tredje kolumnen ($x+y+z=97$) enligt ovanstående tabell. För att emellertid vara säkra på att icke samma kombination kommer att uppträda mer än *en* gång, placera vi talen x, y, z i sådan ordning, att ständigt

$$97 \geqq x \geqq y \geqq z \geqq 0 .$$

Vid inräkningen av kombinationerna ha vi då att särskilja två olika fall, nämligen

$$\alpha)\ 97 \geqq x \geqq 49 ,$$
$$\beta)\ 48 \geqq x \geqq 33 .$$

I fallet $\alpha)$ är $x > y+z$, varför z kan antaga alla heltalsvärden från och med 0 till och med $E\left(\frac{97-x}{2}\right)$. Vare sig x är ett udda tal

$$x = 2k+1, \qquad 48 \geqq k \geqq 24,$$

eller x är ett jämnt tal

$$x = 2k, \qquad 48 \geqq k \geqq 25,$$

antar z därför alla heltalsvärden från och med 0 upp till $48-k$, inalles $49-k$ kombinationer. Hela antalet kombinationer av kategorien $\alpha)$ är således

$$\begin{aligned} s_1 &= 1+1+2+2+3+3+\ldots+24+24+25 \\ &= 2(1+2+3+\ldots+24)+25 \\ &= 24\cdot 25+25 = 25^2 = 625 . \end{aligned}$$

I fallet $\beta)$ är $x < y+z$, vilket medför, att z icke kan antaga hur små värden som helst utan måste successivt antaga minimivärdena 1, 3, 5, ... 29, 31. Antalet kombinationer av kategorien $\beta)$ blir således

$$s_2 = 25 + 2(26 + 27 + \ldots + 32) + 33 - (1 + 3 + 5 + \ldots + 31)$$
$$= 25 + 7 \cdot 58 + 33 - 8 \cdot 32$$
$$= 8 \cdot 58 - 8 \cdot 32 = 8 \cdot 26 = 208.$$

Totala antalet kombinationer blir således

$$s = s_1 + s_2 = 833.$$

Lösning II. Man finner lätt, att talen 1, 2, 3, 4, ... 31, 32, 33, 34 ingå såsom *minsta summand* i resp. 49, 48, 46, 45, ... 4, 3, 1, 0 summor. Hela antalet summor är således

$$s = 49 + 48 + 46 + 45 + 43 + 42 + \ldots$$
$$+ 0 + 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + \ldots$$
$$= 17 \cdot 49 = 833.$$

Iter.

Även löst av X, vilken generaliserat uppgiften.

242) *Rektangeln av två sidor i en triangel är som bekant lika med kvadraten på bissektrisen till den mellanliggande vinkeln tillsammans med rektangeln av de båda segment, i vilka den tredje sidan delas av bissektrisen. Undersök, huruvida satsen är omvändbar.* *Iter.*

I. Antag, att D är en punkt, så belägen på basen BC i en $\triangle ABC$, att

$$AB \cdot AC = \overline{AD}^2 + BD \cdot CD.$$

Utdrag AD, tills den skär den omskrivna cirkeln i E. Då är

$$AB \cdot AC = \overline{AD}^2 + AD \cdot DE = AD \cdot AE.$$

I $\triangle$:a ABE och ADC har man alltså

$$AB : AE = AD : AC.$$

Vidare är $\angle E = \angle C$.

Två fall äro nu tänkbara.

1) $\angle$:a ABE och ADC äro av *samma slag*. Då äro de båda trianglarna likformiga och AD är bissektris till $\angle A$.

2) $\angle$:a ABE och ADC äro av *olika slag*. Då måste de som bekant vara supplementvinklar och följaktligen $\angle ADC = \angle ACE$. Men då är $\angle ACD = \angle AEC = \angle ABC$ och således $AB = AC$.

Är omvänt $AB = AC$ och ADE en transversal, som skär

BC i D och den omskrivna cirkeln i E, inses att $\triangle AEB \sim$ $\sim ABD$, så att $AB \cdot AC = \overline{AB}^2 = AD \cdot AE = \overline{AD}^2 + BD \cdot DC$.

Satsen är således omvändbar för $AB \neq AC$.

II. Annan lösning.

Antag, att koordinaterna för A, B och C i ett rätvinkligt koordinatsystem äro $A(p; q)$, $B(-a; 0)$ och $C(a; 0)$, där $a > 0$, samt att $D(x; 0)$ är en variabel punkt mellan B och C. Då är

$$\overline{AD}^2 + BD \cdot CD = (x-p)^2 + q^2 + a^2 - x^2 = a^2 + p^2 + q^2 - \\ - 2px = f(x).$$

1. $p \neq 0$. Då varierar $f(x)$ monotont från $f(-a) = \overline{AB}^2$ till $f(a) = \overline{AC}^2$, när x växer från $-a$ till $+a$. $f(x)$ antager således varje mellan $f(-a)$ och $f(a)$ beläget värde en och endast en gång. Då AD är bissektris till $\angle A$, antager $f(a)$ specialvärdet $AB \cdot AC$.

2. $p = 0$. Då är $AB = AC$ och $f(x)$ hela tiden $= a^2 + \\ + q^2 = AB \cdot AC$. AD behöver ej vara bissektris för att förutsättningen $AB \cdot AC = \overline{AD}^2 + BD \cdot CD$ skall vara uppfylld.

Låt nu D vara en punkt på förlängningen av BC åt endera hållet. Är då AD yttre bissektris till $\angle A$, bara därför att

$$DB \cdot DC - \overline{AD}^2 = AB \cdot AC?$$

Vi undersöka som nyss

$$g(x) = DB \cdot DC - \overline{AD}^2 = x^2 - a^2 - [(x-p)^2 + q^2] = 2px - \\ - a^2 - p^2 - q^2$$

och finna att så måste vara fallet, om $p \neq 0$, emedan $g(x)$ då antager det till den yttre bissektrisen hörande värdet $AB \cdot AC$ en och endast en gång.

Är däremot $AB = AC$, blir oberoende av D:s läge

$$DB \cdot DC - \overline{AD}^2 = -AB \cdot AC. \qquad X.$$

Om koncykliska punkter.

Av X.

De satser, som avhandla punkters samtidiga läge på en cirkel (koncykliska punkter), äro ofta till formuleringen enkla och allmängiltiga, men deras bevis kräver vanligen, då det föres med stöd av Euklides III: 21 och 22, en mer eller mindre ingående diskussion av ett flertal figurer, emedan vinklar utbytas mot supplementvinklar, konvexa fyrhörningar mot icke konvexa o. s. v., då man övergår från en figur till en annan. Det är ju intet ont i en sådan diskussion i och för sig, i synnerhet i enklare fall. I mer komplicerade kan det dock vara en fördel att ha en något så när begreppsmässig bevismetod, som tillåter bevisets förande utan figur, om man så vill.

Fördenskull kan man ersätta vanlig likhet mellan vinklar med kongruens modulo π mellan deras absoluta mått (d. v. s. radiantal). För en linje a eller AB inför jag symbolen (a) eller (AB), som betyder någon av bestämningarna för arcty k, där k är linjens vinkelkoefficient i något (en gång för alla fastlagt) rätvinkligt koordinatsystem. (a) betyder då också *den vinkel på heltalsmultipler av π när, som grundriktningen skall vridas i positiv led för att bli parallell med a.* Man kan kalla (a) för linjens »riktning». Likhetstecknet i det följande betyder »kongruent med mod. π». Addition, subtraktion och multiplikation med hela tal äro vid räkning med dylika kongruenser tillåtna precis som i fråga om vanliga ekvationer.

Den geometriska användningen baseras på följande enkla grundsatser:

I. $(a) = (b)$. *Linjerna a och b parallella.*

II. $(a) - (b) = (d) - (c)$ eller $(a) + (c) = (b) + (d)$.

Den av linjerna a, b, c, d i denna (eller motsatt) ordning bildade 4-hörningen inskrivbar i en cirkel (a och c antiparallella med avseende på b och d). Se fig. 1.

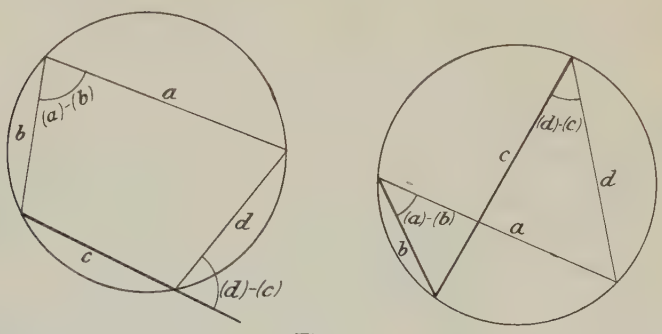


Fig. 1.

I allmängiltigheten av denna grundsats ligger metodens styrka och användbarhet i här avsedda fall.

III. $(a) + (b) = 2(c)$ En av bissektriserna till vinklarna mellan a och b är parallell med c, d. v. s. *a och b äro antiparallella med avseende på c.*

Det återstår endast att med några enkla exempel belysa metodens användning.

1. (Fig. 2.) *Av cirklarna C_1, C_2, C_3, C_4 i denna ordning skär varje C_i den föregående C_{i-1} i A_i och B_i; $C_0 = C_4$, $i = 1, 2, 3, 4$. Om då A_1, A_2, A_3, A_4 äro koncykliska, måste B_1, B_2, B_3, B_4 även vara det.*

Kalla A_iB_i för l_i, A_iA_{i+1} för a_i och B_iB_{i+1} för b_i, då dessutom $A_5 = A_1$, $B_5 = B_1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Då är $$(a_1) + (b_1) = (l_1) + (l_2),$$

och $$(a_3) + (b_3) = (l_3) + (l_4),$$

varav efter addition och cyklisk permutation

$$\sum_1^4 (l_i) = (a_1) + (a_3) + (b_1) + (b_3) = (a_2) + (a_4) + (b_2) + (b_4).$$

Om nu $$(a_1) + (a_3) = (a_2) + (a_4),$$

erhålles, att $$(b_1) + (b_3) = (b_2) + (b_4).$$ v. s. b.

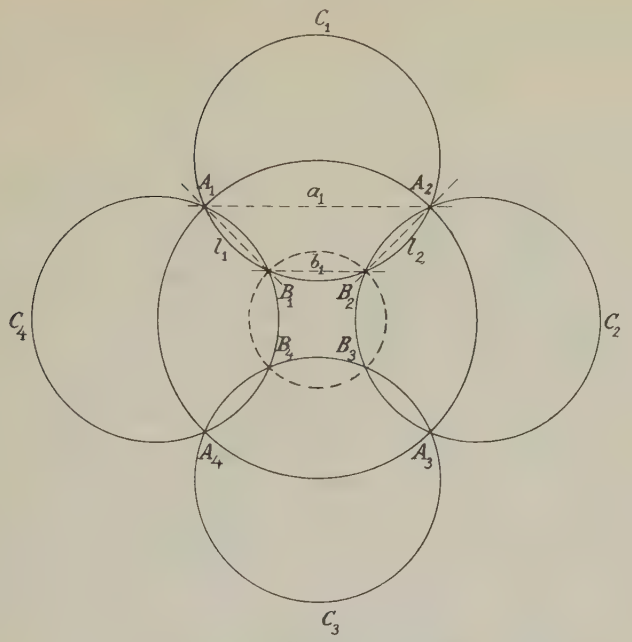


Fig. 2.

2. (Fig. 3.) s_1, s_2, s_3, s_4 *äro fyra givna linjer i allmänt läge, så att fyra egentliga trianglar bildas av de tre återstående linjerna, då en i sänder uteslutes. De kring dessa trianglar omskrivna cirklarna gå alla genom samma punkt.* Den cirkel, som erhålles, då s_i uteslutes, kallas C_i. Vi betrakta först C_1, C_2 och C_3. De båda första gå genom skärningspunkten mellan s_3 och s_4 och ha dessutom en andra skärningspunkt [1] P, som ej ligger på s_4. Den linje, som förenar P med skärningspunkten mellan s_4 och s_j, $j = 1, 2, 3$, betecknas l_j. Då får man, att

$$(l_2) - (l_3) = (s_2) - (s_3)$$
$$(l_2) - (l_1) = (s_3) - (s_1),$$

och härav efter addition

$$(l_2) - (l_1) = (s_2) - (s_1).$$

[1] C_1 och C_2 kunna ej sammanfalla, då de ha olika skärningspunkter med s_4. Om de tangerade varandra, skulle s_1 och s_2 vara parallella i strid med förutsättningen.

Men detta innebär, att även C_3 går genom P. Låter man s_3 och s_4 byta nummer, följer på samma sätt, att C_4 likaledes går genom P. v. s. b.

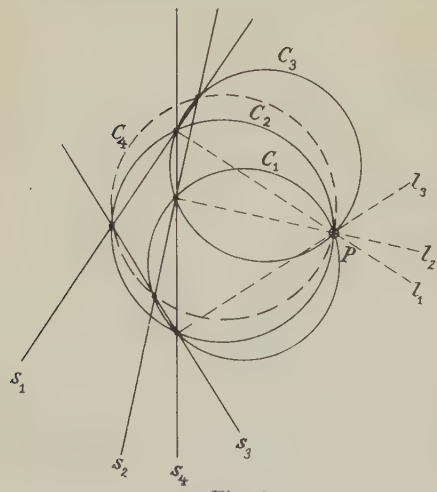


Fig. 3.

3. *$A_1A_2A_3$ är en triangel, P en punkt, som ej ligger på någon av triangelns sidor eller deras förlängningar. Man konstruerar de med cirklarna PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2 symmetriska cirklarna med avseende på A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 resp. De nya cirklarna råkas då också i samma punkt Q.*

Kalla P:s symmetripunkter med avseende på triangelsidorna a_1, a_2, a_3 för P_1, P_2, P_3 resp.

Då är $(PA_2) + (P_1A_2) = (PA_3) + (P_1A_3) = 2(a_1)$,

varav $$(P_1A_2) - (P_1A_3) = -\{(PA_2) - (PA_3)\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

På samma sätt fås, att

$$(P_2A_3) - (P_2A_1) = -\{(PA_3) - (PA_1)\}, \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$(P_3A_1) - (P_3A_2) = -\{(PA_1) - (PA_2)\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Om nu cirklarna $P_1A_2A_3$ och $P_2A_3A_1$ utom i A_3 råkas i punkten Q, som att börja med förutsättes entydigt bestämd och A_1, A_2, A_3, har man, att

$$(QA_2) - (QA_3) = (P_1A_2) - (P_1A_3),$$
$$(QA_3) - (QA_1) = (P_2A_3) - (P_2A_1).$$

Härav följer med stöd av (1), (2), (3) efter addition, att

$$(QA_2) - (QA_1) = (P_3A_2) - (P_3A_1),$$

och denna kongruens innebär, att även cirkeln $P_3A_1A_2$ går genom Q.

Faller Q i A_3, skall (QA_3) ersättas med (t), som är riktningen för den gemensamma tangenten till $P_1A_2A_3$ och

$P_2A_3A_1$ i punkten A_3; (QA_1), (QA_2) ersättas med resp. (a_2), (a_1). Man finner då på samma sätt, att

$$(a_1) - (a_2) = (P_3A_2) - (P_3A_1),$$

d. v. s. cirkeln $P_3A_1A_2$ är den kring triangeln omskrivna och satsen gäller fortfarande. Punkten P ligger då på den cirkel, som är symmetrisk med den omskrivna med avseende på sidan A_1A_2. Det kan inträffa att (t) även är riktningen för den omskrivna cirkelns tangent i A_3. Då sammanfalla de tre cirklarna $P_1A_2A_3$, $P_2A_3A_1$, $P_3A_1A_2$ alla med den omskrivna och Q är fullständigt obestämd. P ligger då i triangelhöjdernas skärningspunkt (triangeln ej rätvinklig).

Faller slutligen Q i punkten A_1 (eller A_2) är cirkeln $P_1A_2A_3$ (resp. $P_2A_3A_1$) identisk med den omskrivna.[1]

4. *Givna äro linjen a med punkten A och linjen b med punkten B. Man konstruerar två cirklar, som tangera varandra i P och dessutom den ena a i A och den andra b i B. Orten för P?*

Låt P vara en sådan kontaktpunkt. Kalla cirklarnas gemensamma tangent i P för t. Då är

$$2(PA) = (a) + (t)$$
$$2(PB) = (b) + (t),$$

och alltså $$2\{(PA) - (PB)\} = (a) - (b).$$

Därav:

$$1.\quad (PA) - (PB) = \frac{(a) - (b)}{2}$$

$$2.\quad (PA) - (PB) = \frac{(a) - (b)}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Den *möjliga* orten utgöres alltså av två ortogonala cirklar genom A och B. Som ovanstående slutsatser kunna upprepas i motsatt ordning, är denna möjliga ort även den verkliga. Om $(a) + (b) = 2(AB)$, finnes en cirkel, som samtidigt tangerar a i A och b i B. Denna är då den ena beståndsdelen av orten, som det bör vara, då den rimligtvis kan anses tangera sig själv i varje punkt!

[1] En v. s. b. av punkterna A_1, A_2, A_3 kan i den allmänna satsen utbytas mot höjdernas skärningspunkt och motsvarande konstruktion ger sedan samma punkt Q som den ursprungliga för givet P. Det är alltså *sex* cirklar, som gå genom Q och erhållas ur sex andra genom P medelst symmetrisering.

Talen $\frac{\alpha^\varphi - \beta^\varphi}{2}$ och $\frac{\alpha^\varphi + \beta^\varphi}{2}$ och deras relationer.

Av KARL BLIX.

Kap. 1.

Allmänna formler.

Under förutsättning att α, β och φ äro godtyckliga (reella, imaginära eller komplexa) tal med den enda inskränkningen, att α och β ej äro $=0$[1], införa vi följande beteckningar och definitioner:

$$U_\varphi = \frac{\alpha^\varphi - \beta^\varphi}{2}. \qquad \text{(I)}$$

$$V_\varphi = \frac{\alpha^\varphi + \beta^\varphi}{2}. \qquad \text{(II)}$$

$$b = \alpha\beta. \qquad \text{(III)}$$

Genom addition och subtraktion av (I) och (II) får man:

$$\alpha^\varphi = V_\varphi + U_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\beta^\varphi = V_\varphi - U_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Multipliceras dessa ekvationer och tages hänsyn till (III), fås:

$$V_\varphi^2 - U_\varphi^2 = b^\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[1] En *allmän* potens är nämligen ej definierad för det fall, att basen är 0. Att de räknelagar för allmänna potenser, som här komma till användning, nämligen $\alpha^\varphi \cdot \beta^\varphi = (\alpha\beta)^\varphi$, $\alpha^{-\varphi} = \frac{1}{\alpha^\varphi}$ och $\alpha^\varphi \cdot \alpha^{\varphi_1} = \alpha^{\varphi+\varphi_1}$, äga bestånd, finns bevisat i t. ex. Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik. 2. Aufl. II Abt. 12 Abschnitt.

Enligt (I), (II) och (III) är:

$$U_{-\varphi}=\frac{\alpha^{-\varphi}-\beta^{-\varphi}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^\varphi}-\frac{1}{\beta^\varphi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha^\varphi\beta^\varphi}\cdot\frac{\alpha^\varphi-\beta^\varphi}{2}=-\frac{U_\varphi}{b^\varphi}. \quad (4)$$

$$V_{-\varphi}=\frac{\alpha^{-\varphi}+\beta^{-\varphi}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^\varphi}+\frac{1}{\beta^\varphi}\right)=\frac{1}{\alpha^\varphi\beta^\varphi}\cdot\frac{\alpha^\varphi+\beta^\varphi}{2}=\frac{V_\varphi}{b^\varphi}. \quad (5)$$

Dessa båda formler ange sambandet mellan $U_{-\varphi}$ och U_φ, resp. $V_{-\varphi}$ och V_φ.

Låta vi även φ_1 beteckna ett godtyckligt tal, får man med användning av (1) och (2):

$$\alpha^{\varphi+\varphi_1}=\alpha^\varphi\cdot\alpha^{\varphi_1}=(V_\varphi+U_\varphi)(V_{\varphi_1}+U_{\varphi_1})=$$

$$=V_\varphi V_{\varphi_1}+V_\varphi U_{\varphi_1}+U_\varphi V_{\varphi_1}+U_\varphi U_{\varphi_1}$$

$$\beta^{\varphi+\varphi_1}=\beta^\varphi\cdot\beta^{\varphi_1}=(V_\varphi-U_\varphi)(V_{\varphi_1}-U_{\varphi_1})=$$

$$=V_\varphi V_{\varphi_1}-V_\varphi U_{\varphi_1}-U_\varphi V_{\varphi_1}+U_\varphi U_{\varphi_1}$$

och alltså genom subtraktion och addition med hänsyn tagen till (I) och (II):

$$U_{\varphi+\varphi_1}=U_\varphi V_{\varphi_1}+V_\varphi U_{\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$V_{\varphi+\varphi_1}=V_\varphi V_{\varphi_1}+U_\varphi U_{\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dessa båda *additionsteorem* äro av fundamental betydelse.

Genom att i (6) och (7) utbyta φ_1 mot $-\varphi_1$ och tillämpa (4) och (5) fås:

$$U_{\varphi-\varphi_1}=\frac{U_\varphi V_{\varphi_1}-V_\varphi U_{\varphi_1}}{b^{\varphi_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$V_{\varphi-\varphi_1}=\frac{V_\varphi V_{\varphi_1}-U_\varphi U_{\varphi_1}}{b^{\varphi_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Sätter man speciellt $\varphi_1=\varphi$ i (6) och (7), får man:

$$U_{2\varphi}=2U_\varphi V_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$V_{2\varphi}=V_\varphi^2+U_\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Elimineras U_φ, resp. V_φ, mellan (11) och (3), får man:

$$V_{2\varphi} = 2V_\varphi^2 - b^\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a)$$

$$V_{2\varphi} = 2U_\varphi^2 + b^\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,b)$$

Multipliceras två och två av ekv. (6)—(9), får man med användning av (3):

1. $U_{\varphi+\varphi_1} \cdot U_{\varphi-\varphi_1} =$

$$= \frac{(U_\varphi V_{\varphi_1} + V_\varphi U_{\varphi_1})(U_\varphi V_{\varphi_1} - V_\varphi U_{\varphi_1})}{b^{\varphi_1}} = \frac{U_\varphi^2 V_{\varphi_1}^2 - V_\varphi^2 U_{\varphi_1}^2}{b^{\varphi_1}} =$$

$$= \frac{U_\varphi^2 (U_{\varphi_1}^2 + b^{\varphi_1}) - U_{\varphi_1}^2 (U_\varphi^2 + b^\varphi)}{b^{\varphi_1}} = U_\varphi^2 - b^{\varphi-\varphi_1} \cdot U_{\varphi_1}^2 \quad (12\,a)$$

Elimineras U_φ^2 och $U_{\varphi_1}^2$ mellan denna ekv. och (3), får man:

$$U_{\varphi+\varphi_1} \cdot U_{\varphi-\varphi_1} = V_\varphi^2 - b^{\varphi-\varphi_1} \cdot V_{\varphi_1}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12\,b)$$

Elimineras V_φ och V_{φ_1} mellan (12 b) och (11 a)[1], får man:

$$2U_{\varphi+\varphi_1} \cdot U_{\varphi-\varphi_1} = V_{2\varphi} - b^{\varphi-\varphi_1} \cdot V_{2\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad (12\,c)$$

2. På analogt sätt får man:

$$V_{\varphi+\varphi_1} \cdot V_{\varphi-\varphi_1} = V_\varphi^2 + b^{\varphi-\varphi_1} \cdot U_{\varphi_1}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (13\,a)$$

$$V_{\varphi+\varphi_1} \cdot V_{\varphi-\varphi_1} = U_\varphi^2 + b^{\varphi-\varphi_1} \cdot V_{\varphi_1}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (13\,b)$$

$$2V_{\varphi+\varphi_1} \cdot V_{\varphi-\varphi_1} = V_{2\varphi} + b^{\varphi-\varphi_1} \cdot V_{2\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad (13\,c)$$

3. Vidare är med användning av (10):

$$2U_{\varphi+\varphi_1} \cdot V_{\varphi-\varphi_1} = \frac{2(U_\varphi V_{\varphi_1} + V_\varphi U_{\varphi_1})(V_\varphi V_{\varphi_1} - U_\varphi U_{\varphi_1})}{b^{\varphi_1}} =$$

$$= \frac{2U_\varphi V_\varphi \cdot V_{\varphi_1}^2 - 2U_{\varphi_1} V_{\varphi_1} \cdot U_\varphi^2 + 2U_{\varphi_1} V_{\varphi_1} \cdot V_\varphi^2 - 2U_\varphi V_\varphi \cdot U_{\varphi_1}^2}{b^{\varphi_1}} =$$

$$= \frac{U_{2\varphi}(V_{\varphi_1}^2 - U_{\varphi_1}^2) + U_{2\varphi_1}(V_\varphi^2 - U_\varphi^2)}{b^{\varphi_1}} = U_{2\varphi} + b^{\varphi-\varphi_1} \cdot U_{2\varphi_1} \quad . \quad (14)$$

4. På analogt sätt fås:

$$2V_{\varphi+\varphi_1} \cdot U_{\varphi-\varphi_1} = U_{2\varphi} - b^{\varphi-\varphi_1} \cdot U_{2\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

[1] Eller U_φ och U_{φ_1} mellan (12 a) och (11 b).

Om m är ett *helt positivt tal*, får man med användning av (1), (2) och binomialteoremet:

$$U_{m\varphi} = \frac{(\alpha^\varphi)^m - (\beta^\varphi)^m}{2} = \frac{(V_\varphi + U_\varphi)^m - (V_\varphi - U_\varphi)^m}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(V_\varphi^m + \frac{m}{1} V_\varphi^{m-1} U_\varphi + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} V_\varphi^{m-2} U_\varphi^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} V_\varphi^{m-3} U_\varphi^3 + \ldots + \frac{m}{1} V_\varphi U_\varphi^{m-1} + U_\varphi^m\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(V_\varphi^m - \frac{m}{1} V_\varphi^{m-1} U_\varphi + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} V_\varphi^{m-2} U_\varphi^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} V_\varphi^{m-3} U_\varphi^3 + \ldots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{m}{1} V_\varphi U_\varphi^{m-1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^m U_\varphi^m\right)$$

och alltså

$$U_{m\varphi} = \frac{m}{1} V_\varphi^{m-1} U_\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} V_\varphi^{m-3} U_\varphi^3 + \ldots \quad (16)$$

Är m ett *udda* tal, blir tydligen sista termen U_φ^m, men är m ett *jämnt* tal, blir den $mV_\varphi U_\varphi^{m-1}$.

Då $V_{m\varphi} = \frac{(\alpha^\varphi)^m + (\beta^\varphi)^m}{2} = \frac{(V_\varphi + U_\varphi)^m + (V_\varphi - U_\varphi)^m}{2}$, finner man på analogt sätt som nyss:

$$V_{m\varphi} = V_\varphi^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} V_\varphi^{m-2} U_\varphi^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} V_\varphi^{m-4} U_\varphi^4 + \ldots \quad (17)$$

Är här m ett *udda* tal, blir sista termen $mV_\varphi U_\varphi^{m-1}$, men är m ett *jämnt* tal, blir den U_φ^m.

Enligt det föregående blir:

$$V_{m\varphi} \pm U_{m\varphi} = \tfrac{1}{2}[(V_\varphi + U_\varphi)^m + (V_\varphi - U_\varphi)^m] \pm$$

$$\pm \tfrac{1}{2}[(V_\varphi + U_\varphi)^m - (V_\varphi - U_\varphi)^m]$$

och efter reducering:

$$V_{m\varphi} \pm U_{m\varphi} = (V_\varphi \pm U_\varphi)^m, \quad \ldots \quad (18)$$

där tecknen motsvara varandra.[1]

Om m är ett *udda* tal, blir:

$$(\alpha^\varphi \pm \beta^\varphi)^m = \alpha^{m\varphi} \pm \frac{m}{1}\alpha^{(m-1)\varphi}\beta^\varphi + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^{(m-2)\varphi}\beta^{2\varphi} \pm \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1\cdot 2\ldots\frac{1}{2}(m-1)}\alpha^{\frac{(m+1)\varphi}{2}}\beta^{\frac{(m-1)\varphi}{2}} +$$

$$+ (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1\cdot 2\ldots\frac{1}{2}(m-1)}\alpha^{\frac{(m-1)\varphi}{2}}\beta^{\frac{(m+1)\varphi}{2}} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^{2\varphi}\beta^{(m-2)\varphi} + \frac{m}{1}\alpha^\varphi\beta^{(m-1)\varphi} \pm \beta^{m\varphi}.$$

Tager man här plustecknen och sammanför de termer, som hava samma koefficienter, får man:

$$2^{m-1} \cdot V_\varphi^m = V_{m\varphi} + \frac{m}{1}b^\varphi V_{(m-2)\varphi} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}b^{2\varphi}V_{(m-4)\varphi} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1\cdot 2\ldots\frac{1}{2}(m-1)}b^{\frac{(m-1)\varphi}{2}}V_\varphi. \quad \ldots \quad (19)$$

Tager man minustecknen och förfar på samma sätt som nyss, fås:

$$2^{m-1} \cdot U_\varphi^m = U_{m\varphi} - \frac{m}{1}b^\varphi U_{(m-2)\varphi} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}b^{2\varphi}U_{(m-4)\varphi} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1\cdot 2\ldots\frac{1}{2}(m-1)}b^{\frac{(m-1)\varphi}{2}}U_\varphi. \quad (20)$$

[1] Denna formel kan generaliseras. Är nämligen μ ett *godtyckligt* tal, blir enligt (1) och (2):

$$V_{\mu\varphi} + U_{\mu\varphi} = \alpha^{\mu\varphi} = (\alpha^\varphi)^\mu = (V_\varphi + U_\varphi)^\mu$$

och $$V_{\mu\varphi} - U_{\mu\varphi} = \beta^{\mu\varphi} = (\beta^\varphi)^\mu = (V_\varphi - U_\varphi)^\mu.$$

Är speciellt $m=3$, får man alltså:

$$4V_\varphi^3 = V_{3\varphi} + 3b^\varphi V_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$4U_\varphi^3 = U_{3\varphi} - 3b^\varphi U_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Om m är ett *jämnt* tal, blir mellersta termen vid utvecklingen av $(\alpha^\varphi \pm \beta^\varphi)^m : (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m(m-1) \ldots \frac{m+2}{2}}{1 \cdot 2 \quad \ldots \quad \frac{m}{2}} \alpha^{\frac{m\varphi}{2}} \beta^{\frac{m\varphi}{2}}$,

och alltså på analogt sätt som nyss:

$$2^{m-1} \cdot V_\varphi^m = V_{m\varphi} + \frac{m}{1} b^\varphi V_{(m-2)\varphi} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{2\varphi} V_{(m-4)\varphi} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1) \ldots \frac{m+2}{2}}{1 \cdot 2 \quad \ldots \quad \frac{m}{2}} b^{\frac{m\varphi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

och

$$2^{m-1} \cdot U_\varphi^m = V_{m\varphi} - \frac{m}{1} b^\varphi V_{(m-2)\varphi} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{2\varphi} V_{(m-4)\varphi} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1) \ldots \frac{m+2}{2}}{1 \cdot 2 \quad \ldots \quad \frac{m}{2}} \cdot b^{\frac{m\varphi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Om m är ett *jämnt* tal och alltså $m=2\mu$, där μ är ett helt positivt tal, så blir

$$\frac{x^m - y^m}{x - y} = x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + x^\mu y^{\mu-1} +$$

$$+ x^{\mu-1}y^\mu + \ldots + x^2 y^{m-3} + xy^{m-2} + y^{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Om man här sätter $x=\alpha^\varphi$ och $y=\beta^\varphi$ och sammanför första och sista termerna, andra och näst sista termerna o. s. v., får man med användning av (I) och (II):

$$\frac{U_{m\varphi}}{U_\varphi} = 2V_{(m-1)\varphi} + b^\varphi \cdot 2V_{(m-3)\varphi} + b^{2\varphi} \cdot 2V_{(m-5)\varphi} + \ldots$$

$$\ldots + b^{\frac{m-2}{2} \cdot \varphi} \cdot 2V_\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Om man sätter $x=\alpha^\varphi$ och $y=-\beta^\varphi$ och förfar på samma sätt, får man:

$$\frac{U_{m\varphi}}{2V_\varphi}=U_{(m-1)\varphi}-b^\varphi\cdot U_{(m-3)\varphi}+b^{2\varphi}U_{(m-5)\varphi}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{m-2}{2}}b^{\frac{m-2}{2}\varphi}\cdot U_\varphi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Om däremot m är ett *udda* tal och alltså $m=2\mu-1$, så blir de mellersta termerna i (25):

$$\ldots+x^\mu y^{\mu-2}+x^{\mu-1}y^{\mu-1}+x^{\mu-2}y^\mu+\ldots,$$

och om man sätter $x=\alpha^\varphi$ och $y=\beta^\varphi$ och förfar som ovan, får man:

$$\frac{U_{m\varphi}}{U_\varphi}=2V_{(m-1)\varphi}+b^\varphi\cdot 2V_{(m-3)\varphi}+b^{2\varphi}\cdot 2V_{(m-5)\varphi}+\ldots$$
$$\ldots+b^{\frac{m-1}{2}\cdot\varphi} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Sätter man $x=\alpha^\varphi$ och $y=-\beta^\varphi$, får man på samma sätt:

$$\frac{V_{m\varphi}}{V_\varphi}=2V_{(m-1)\varphi}-b^\varphi\cdot 2V_{(m-3)\varphi}+b^{2\varphi}\cdot 2V_{(m-5)\varphi}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot b^{\frac{m-1}{2}\cdot\varphi} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Av intresse är även talet

$$T_\varphi=\frac{U_\varphi}{V_\varphi} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Med användning av (4) och (5) får man:

$$T_{-\varphi}=\frac{U_{-\varphi}}{V_{-\varphi}}=-\frac{U_\varphi}{V_\varphi}=-T_\varphi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Användes (6)—(9), får man genom förkortning med $V_\varphi V_{\varphi_1}$:

$$T_{\varphi\pm\varphi_1}=\frac{U_{\varphi\pm\varphi_1}}{V_{\varphi\pm\varphi_1}}=\frac{U_\varphi V_{\varphi_1}\pm V_\varphi U_{\varphi_1}}{V_\varphi V_{\varphi_1}\pm U_\varphi U_{\varphi_1}}=\frac{T_\varphi\pm T_{\varphi_1}}{1\pm T_\varphi T_{\varphi_1}} . \quad . \quad (32)$$

där tecknen motsvara varandra.

Sätter man i (32) $\varphi_1=\varphi$, blir:

$$T_{2\varphi}=\frac{2T_\varphi}{1+T_\varphi^2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Enligt (10) och (3) är:

$$U_{2\varphi}=\frac{2b^\varphi U_\varphi V_\varphi}{b^\varphi}=\frac{2b^\varphi U_\varphi V_\varphi}{V_\varphi^2-U_\varphi^2}=\frac{2b^\varphi T_\varphi}{1-T_\varphi^2} . \quad . \quad . \quad (34)$$

och enligt (11) och (3) är:

$$V_{2\varphi} = \frac{b^\varphi (V_\varphi^2 + U_\varphi^2)}{b^\varphi} = \frac{b^\varphi (V_\varphi^2 + U_\varphi^2)}{V_\varphi^2 - U_\varphi^2} = b^\varphi \cdot \frac{1 + T_\varphi^2}{1 - T_\varphi^2} . \quad (35)$$

Vidare är:

$$V_\varphi^2 = \frac{b^\varphi V_\varphi^2}{b^\varphi} = \frac{b^\varphi V_\varphi^2}{V_\varphi^2 - U_\varphi^2} = \frac{b^\varphi}{1 - T_\varphi^2} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$$U_\varphi^2 = \frac{b^\varphi U_\varphi^2}{V_\varphi^2 - U_\varphi^2} = b^\varphi \cdot \frac{T_\varphi^2}{1 - T_\varphi^2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Härmed hava de viktigaste och generellaste relationerna mellan talen U_φ och V_φ lämnats.

Kap. 2.

De hyperboliska och trigonometriska funktionerna och sambandet mellan dem.

Vi övergå nu till behandlingen av två viktiga specialfall av de i föregående kapitel avhandlade talen U_φ och V_φ.

1. Om man i (I) och (II) sätter $\alpha = e$ och $\beta = e^{-1}$, där e är det naturliga logaritmsystemets bas, och φ är en variabel storhet, så äro

$$U_\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$$

och

$$V_\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}$$

funktioner av φ (reella, om φ är en reell variabel).

Vi införa nu följande funktionstecken:

$$\boldsymbol{Sin}\,\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \quad (a)$$

$$\boldsymbol{Cos}\,\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} . \quad (b)$$

Enligt (III) blir: $b = e^\varphi \cdot e^{-\varphi} = 1$.

Om man alltså i formlerna, som härletts i kap. 1, insätter $U_\varphi = \boldsymbol{Sin}\,\varphi$, $V_\varphi = \boldsymbol{Cos}\,\varphi$ och $b = 1$, erhåller man motsvarande relationer mellan $\boldsymbol{Sin}\,\varphi$ och $\boldsymbol{Cos}\,\varphi$.

Så t. ex. får man genom insättning i (3):

$$\boldsymbol{Cos}^2\varphi - \boldsymbol{Sin}^2\varphi = 1\,,$$

av vilken ekvation följer, att $\boldsymbol{Cos}\,\varphi$ och $\boldsymbol{Sin}\,\varphi$ äro koordinatpar för punkter på den liksidiga hyperbeln [1]

$$x^2 - y^2 = 1\,.$$

Med anledning härav kallas $\boldsymbol{Sin}\,\varphi$ och $\boldsymbol{Cos}\,\varphi$ hyperboliska funktioner av φ.

2. Om man i (I) och (II) sätter $\alpha = e^i$ och $\beta = e^{-i}$, där i är den imaginära enheten, så äro

$$U_\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$

och

$$V_\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

funktioner av φ. Man kan genom att utveckla $e^{i\varphi}$ och $e^{-i\varphi}$ i serie visa, att $\frac{U_\varphi}{i}$ och V_φ äro reella funktioner, när φ är en reell variabel. Införa vi här funktionstecknen:

$$\sin\varphi = \frac{U_\varphi}{i}$$

och

$$\cos\varphi = V_\varphi\,,$$

blir alltså

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad (a')$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\,. \qquad (b')$$

Om man i formlerna i kap. 1 insätter $U_\varphi = i\sin\varphi$, $V_\varphi = \cos\varphi$ och $b = e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} = 1$, får man motsvarande relationer mellan $\sin\varphi$ och $\cos\varphi$.

Så får man genom insättning i (3):

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

Av denna ekvation följer, att $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$ äro koordinatpar för punkter på cirkeln

$$x^2 + y^2 = 1\,,$$

[1] Närmare bestämt på den gren, som ligger inom första och fjärde kvadranten, ty enligt (b) är $\boldsymbol{Cos}\,\varphi \geqq 1$ och alltså $x > 0$.

och med anledning härav kallas de cirkulära funktioner. De benämnas dock vanligen trigonometriska eller goniometriska funktioner, emedan argumentet φ kan tolkas som den med bågmått (radianer) mätta vinkeln mellan den positiva abskissaxeln och radius vector till den punkt på cirkeln, vars koordinater äro

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\varphi \\ y &= \sin\varphi \end{aligned}\right\}^{1}$$

Därav följer, att

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{2} &= 1 \\ \cos\frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ur dessa båda sista ekv. och de formler, som man får genom de nämnda insättningarna $U_\varphi = i\sin\varphi$, $V_\varphi = \cos\varphi$ och $b=1$ i de formler, som uppställts i kap. 1, erhålles hela goniometrien i den mån den gäller sinus och cosinus.

3. Utbytes i (a) och (b) φ mot $i\varphi$, så blir med hänsyn tagen till (a') och (b'):

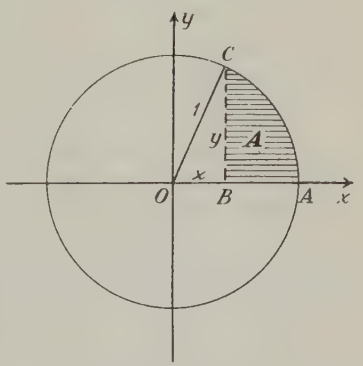
$$\textit{Sin}\, i\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = i\sin\varphi$$

$$\textit{Cos}\, i\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi\,.$$

[1] *Bevis:* Kallas i halvcirkeln $y = \sqrt{1-x^2}$ ytan av BAC för A, så blir:

$$A = \int_x^1 dx\sqrt{1-x^2} = \Big|_x^1 \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{i}{2}\,ln\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{xy}{2} - \frac{i}{2}\,ln(x+iy)\,.$$



Men nu är $x+iy = \cos\varphi + i\sin\varphi =$

$$= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = e^{i\varphi}\,.$$

$\because\ A = -\frac{xy}{2} - \frac{i}{2}\,ln\,e^{i\varphi} = -\frac{xy}{2} + \frac{\varphi}{2}$

och alltså $\frac{\varphi}{2} = \frac{xy}{2} + A =$ sektorn $OAC = \frac{1 \cdot \text{bågen } AC}{2}$.

$\because\ \varphi =$ bågen AC.

På liknande sätt fås ur (a′) och (b′):

$$\sin i\varphi = \frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2i} = i \cdot \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = i\,\mathbf{Sin}\,\varphi$$

$$\cos i\varphi = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2} = \mathbf{Cos}\,\varphi\,.$$

(Forts.)

Värmets mekaniska ekvivalent.

Av HENRIK PETRINI.

Mayer utgår vid sin härledning av ett uttryck på den mekaniska värmeekvivalenten från ett experiment av Gay-Lussac, som utvisar, att den inre energien hos en gas är oberoende av volymen och endast beroende av temperaturen. Härtill använder Mayer en process, som icke är sluten. Om man i stället väljer en lämplig cykelprocess, så behöver man inte stödja sig på detta experiment utan erhåller direkt Mayers formel för den mekaniska värmeekvivalenten. Om man sedan i den Mayerska öppna processen insätter det erhållna uttrycket på värmeekvivalenten, så finner man omedelbart, att den inre energien hos gasen *måste* vara oberoende av volymen om temperaturen är oförändrad.

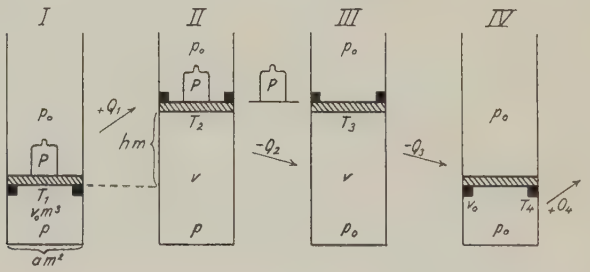
I Molls lärobok omnämnes icke Gay-Lussac's experiment, vadan beviset blir felaktigt, då det tacite förutsätter att gasernas inre energi är oberoende av volymen.[1] Frågan har nu blivit aktuell genom ett h. t. 1925 utgivet studentproblem, och därför har jag ansett, att det kunde hava ett visst intresse att se den metod jag alltid följt vid min undervisning.

Vid min framställning använder jag mig av en cykelprocess. En gasmassa av M kg är innesluten i ett vertikalt nedtill slutet rör, i vilket löper en viktlös kolv utan friktion. Från början är gasen sammantryckt medelst en tyngd P kgf. Den yttre luftens tryck är p_0. Processen blir nu följande.

[1] Om Gay-Lussacs försök se t. ex. GRIMSEHL: Lehrbuch d. Physik Bd. I, s. 439, Aufl. 5. De flesta elementära läroböcker torde förete samma lucka.

I. Ursprungligen är gasens tryck $= p$, volym $= v_0$, absoluta temperatur $= T_1$, $\because \frac{pv_0}{T_1} = MR$, där R är en konstant. Nu tillföres gasen en värmemängd Q_1 under konstant tryck. Härvid blir

II. trycket $= p$, volymen $= v$, temperaturen $= T_2$, $\because \frac{pv}{T_2} = MR$. Nu skjutes en rigel över kolven och tyngden P avlägsnas. Därpå minskas trycket under konstant volym, tills trycket blir = den yttre luftens tryck p_0, därigenom att en värmemängd Q_2 borttages. Då blir



III. trycket $= p_0$, volymen $= v$ och temperaturen $= T_3$, $\because \frac{p_0 v}{T_3} = MR$. Värmemängden Q_3 borttages ytterligare, men under konstant tryck, tills volymen blir den ursprungliga v_0. Man får

IV. trycket $= p_0$, volymen $= v_0$, temperaturen $= T_4$, $\because \frac{p_0 v_0}{T_4} = MR$. En rigel tillskjutes under kolven en vikt $= P$ kg sättes ovanpå densamma, och en värmemängd Q_4 tillföres under konstant volym, till dess att trycket blir = det ursprungliga p. Då nu gasen har återtagit sin ursprungliga volym och sitt ursprungliga tryck, så blir även temperaturen = den ursprungliga, med andra ord gasen har beskrivit en cykelprocess.

Kallas gasens specifika värme vid konstant tryck c_p och dess specifika värme vid konstant volym c_v, fås

$$Q_1 = Mc_p (T_2 - T_1) ; Q_2 = Mc_v (T_2 - T_3) ; \; Q_3 = Mc_p (T_3 - T_4) ;$$
$$Q_4 = Mc_v (T_1 - T_4).$$

Vad blir nu $Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_4$? Kallas detta uttryck för Q så fås

$$Q = Mc_p (T_2 - T_1 - T_3 + T_4) - Mc_v (T_2 - T_3 - T_1 + T_4) =$$
$$= M(c_p - c_v) (T_2 - T_1 - T_3 + T_4).$$

Sätter man in värdena

$$T_1 = \frac{pv_0}{MR}, \; T_2 = \frac{pv}{MR}, \; T_3 = \frac{p_0 v}{MR}, \; T_4 = \frac{p_0 v_0}{MR}, \text{ så fås}$$

$$T_2 - T_1 - T_3 + T_4 = \frac{1}{MR} (pv - pv_0 - p_0 v + p_0 v_0) =$$

$$= \frac{1}{MR} (p - p_0) (v - v_0), \quad \because Q = \frac{c_p - c_v}{R} \cdot (p - p_0) (v - v_0).$$

Är kolvens tvärskärningsyta a m^2, så blir $p = \frac{p_0 a + P}{a} =$

$= p_0 + \frac{P}{a}$. Om kolven har höjt sig h m så blir $v - v_0 =$

$= ha$,

$$\because (p - p_0) (v - v_0) = \frac{P}{a} \cdot ha = Ph .$$

Vid processen har vikten P höjts h m, och således har det uträttats ett arbete $A = Ph$, $\because Q = \frac{c_p - c_v}{R} A$

d. v. s. $A = EQ$, där E är $= \frac{R}{c_p - c_v}$.

För $c_p = 0{,}238$, $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}403$ fås

$$E = \frac{10\,836 \cdot 1{,}403}{273 \cdot 1{,}293 \cdot 0{,}238 \cdot 0{,}403} = 430$$ i stället för 428 kgm d. v. s. $^1/_2$ % för högt.

De enda antaganden, som här äro gjorda, äro dels att gasen är ideell och dels att c_p och c_v äro konstanta. Där-

emot är det först i slutresultatet, som lärjungarna får veta, att värme kan försvinna, om det i stället uträttas ett arbete. Sedan härledes lätt, på sätt förut är antytt, att den inre energien är oberoende av volymen, varav följer, att gasens olika delar ej utöva vare sig attraherande eller repellerande krafter på varandra. Trycket kan sålunda inte förklaras, som förut plägat ske, genom repellerande krafter. Här anser jag den rätta tidpunkten vara att omnämna molekylarteorien såsom ett medel att förklara, huru en gas kan utöva ett tryck, trots det att dess olika delar ej repellera varandra.

Några interferensförsök.

Av TORSTEN WETTERBLAD.

I föreliggande uppsats[1] skola några för skolundervisningen användbara interferensförsök, ett optiskt och tvenne akustiska, beskrivas. Det optiska lämpar sig väl som ersättning för det bekanta Fresnelska spegelförsöket. I justeringshänseende är det enklare än detta senare och kräver för sitt utförande utom de vanliga optiska hjälpmedlen, båglampa, spalt och positiv lins, endast en plan, oförsilvrad glasplatta. Utfört och publicerat av Lloyd 1837 har det tyvärr i läroböckerna föga eller alls icke beaktats. Jag har därför ansett det lämpligt att ge en detaljerad, efter nutidens experimentella resurser avpassad beskrivning av detsamma. Av de bägge akustiska försöken är det första principiellt överensstämmande med det optiska såtillvida, att interferensen är uppkommen genom samverkan av vågor från en enda ursprunglig källa, det andra däremot demonstrerar samverkan av vågor från tvenne primära, koherenta ljudcentra.

Lloyds spegelförsök.

Ljuset från en båglampa B (fig. 1) koncentreras medelst en kondensor K på en horisontell spalt Sp. Omedelbart framför denna placeras å ett i höjdled justerbart stativ en horisontell, oförsilvrad, väl rengjord glasplatta P av cirka 40 cm längd och 10 cm bredd. (Förf. har använt vanligt belgiskt pressat, cirka 8 mm tjockt spegelglas.) Glasplattans

[1] Innehållet i denna uppsats är delvis hämtat från en av förf. hållen föreläsning för lärarekandidater i Stockholm hösten 1926.

övre plan bör befinna sig något lägre än spaltöppningen (se även fig. 2). På en vit skärm, *Sk*, belägen fyra à fem meter från ljuskällan, iakttagas de horisontella interferens-

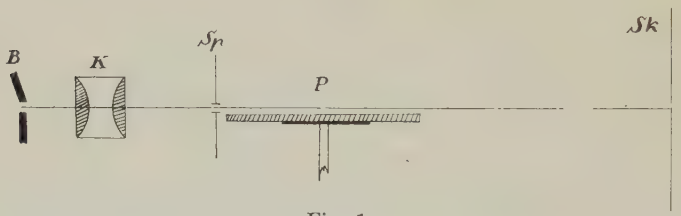


Fig. 1.

linjerna. »Falskt» ljus från båglampa eller kondensor måste omsorgsfullt utestängas. (Om spalten tillslutes, bör skärmen vara obelyst.)

En punkt *M* på skärmen (fig. 2) träffas av såväl direkt från spalten utgående som från den övre spegelytan reflekterade strålar. Dessa senare kunna tänkas utgå från spaltens spegelbild *B*. De från *B* utgående strålarna ha reflekterats under i det närmaste 90 graders vinkel och ha följaktligen

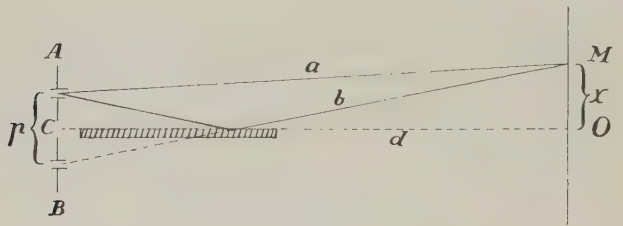


Fig. 2.

samma amplitud som de direkta, men vid reflektionen ha de förlorat $^1/_2$ våglängd. *A* och *B* kunna alltså anses som tvenne självständiga ljuskällor med konstant, av reflexionen betingad fasdifferens.

Svängningstillståndet i punkten *M* på avståndet x från centralpunkten 0 kan lätt på vanligt sätt beräknas. Betecknas avståndet *AM* med a, *BM* med b, *AB* med p och *CO* med

d, erhålles relationen $b - a = \frac{p \cdot x}{d}$. På grund av fasförlusten vid reflexionen blir den optiska vägskillnaden $\frac{px}{d} + \frac{\lambda}{2}$. ($\lambda$ = våglängden)

Sättes $$\frac{px}{d} + \frac{\lambda}{2} = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

erhålles $$\frac{px}{d} = n\lambda.$$

För $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ erhållas de x-värden, som svara mot mörka band. I O ($x = o$; $n = o$) råder mörker, vilket kontinuerligt fortsätter under 0. Ovanför 0, motsvarande $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ synes en serie mörka, horisontella band. Avståndet mellan två på varandra följande band är $\frac{\lambda \cdot d}{p}$. Ju mindre p är, d. v. s. ju närmare varandra spalten och dess spegelbild ligga, desto större blir avståndet mellan banden. I vitt ljus kan man med lätthet på skärmen se 6 à 8 färgade band; sättes mellan kondensorn och spalten ett färgat (exempelvis grönt) glas, framträda ytterligare några band. Denna vinst sker dock på bekostnad av den allmänna ljusstyrkan.

Vill man avstå från objektivering av banden, kunna desamma iakttagas i en intill spegeln placerad lupp eller ett svagt förstorande mikroskop. Med ett vanligt fickspektroskop kunna intressanta iakttagelser göras. Om spektroskopets spalt är vertikal (ställd vinkelrätt mot interferensbanden), ser man spektrum genomdraget av mörka linjer, såsom fig. 3 a utvisar. I violett ligga interferensbanden tätare än i rött. Vrider man däremot spektroskopet så, att spalten blir parallell med banden, får spektrum det utseende, som fig. 3 b och 3 c ange. Ligger spalten alldeles invid övre spegelkanten, synes i spektrum *ett* band, förskjutes spektroskopet i vertikal led,

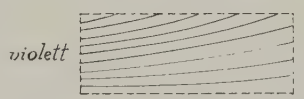


Fig. 3 a.

uppträda allt flera band[1]. Spektroskopet analyserar i detta fall tillståndet på det ställe, där spalten är belägen.

Fig. 3 b.

Fig. 3 c.

Med kännedom om p och d och genom att på skärmen uppmäta avståndet mellan exempelvis fyra band ($n = 5$ och $n = 1$) kan ett genomsnittsvärde på våglängden lätt erhållas. Bestämningen av p sker enklast genom att med en mellan spalt och skärm anbragt lins av relativt kort brännvidd på skärmen avbilda spalten och dess spegelbild. Är avståndet mellan spalt och lins g, mellan skärm och lins h, så reproduceras p i storleken $p \cdot \frac{h}{g} = p_1$. Uppmätes p_1, fås $p = p_1 \cdot \frac{g}{h}$.

Med avseende på injusteringen erbjuder försöket ej några svårigheter. Följande må dock påpekas:

1. Spalten måste vara parallell med glasplattans övre plan. Lämpligt är därför att använda en kring en horisontell axel vridbar spalt.

2. Glasplattans övre plan bör ligga obetydligt under spaltöppningen.

3. Spaltvidden bör göras så liten som möjligt är med hänsyn till ljusstyrkan.

Akustiska interferensförsök.

A. En ljudkälla.

Principen för här beskrivna interferensförsök med en ljudkälla är, att ljudvågor från en inuti en låda anbrakt pipa med högt svängningstal träffa tvenne på en av lådans sidoväggar befintliga hål, vilka kunna betraktas som koherenta ljudcentra. Utförandet av försöket erbjuder vissa svårigheter av teknisk art. För det första måste tillses, att

[1] Spektrums utseende i fig. 3 c är beroende av dispersionen hos spektroskopet.

det material, varav lådan är förfärdigad, är tillräckligt ljudisolerande. Ljud från pipan bör endast utträngа genom hålen. Vidare måste pipan ge en hög och ren ton. Med en kraftig s. k. Galtonpipa[1] och en låda av tjockväggigt (5 cm) lönnträ har jag erhållit goda resultat. Lådans inre dimensioner voro: längd 20 cm, bredd och höjd 10 cm. I det genom pipans öppning gående horisontalplanet voro på en långsida (se fig. 4), symmetriskt i förhållande till öppningen, tvenne par hål (H_1, H_2; H_3, H_4) med 1 cm diameter borrade. Avståndet mellan H_1 och H_2 var 9 cm, mellan H_3 och H_4 18 cm. Hålen voro borrade så, att deras axlar utdragna träffade pipans öppning. Det ena hålparet täcktes med korkar, medan det andra användes. Pipan var fastsatt inuti lådan och kunde genom ett rör eller en kautschukslang (gående genom ett hål i lådans baksida) anblåsas utifrån genom syrgas från en bomb.

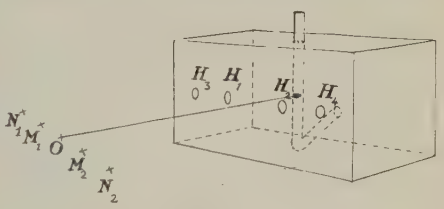


Fig. 4.

Ett i 0 befintligt öra hör en stark ton. Flyttas örat, höras i symmetriskt i förhållande till 0 belägna punkter (M_1, M_2; N_1, N_2) minima. Tilltäppes, medan örat befinner sig i ett minimum, ett av hålen, höres ljudet starkare. Användes det andra hålparet, ändras minimas läge. Samma är förhållandet, om svängningstalet ökas eller minskas.

Med tillhjälp av en ljudkänslig låga kan interferensfenomenet lätt demonstreras. Lågan bör då ha ett fast läge och lådan vridas kring en vertikal axel. Då lågan befinner sig i ett minimum, har den sin maximala höjd, i ett maximum däremot antar den det karakteristiska, breda, kvastliknande utseendet, åtföljt av ett väsande ljud. Särskilt påfallande är den förändring, lågans utseende undergår i ett minimum, om ena hålet tilltäppes.

[1] Jag använde dels en i handeln förekommande Galtonpipa, dels en av maskinist Berggren vid Norra Reallärоverket i Stockholm förfärdigad pipa.

B. Två ljudkällor.

Låter man växelström genomgå tvenne telefoner, bliva dessa koherenta svängningscentra. Den vanliga 50-periodiska strömmen är av lätt insedda skäl oanvändbar. Flera experimentella möjligheter finnas att utan större kostnad frambringa ström av passande frekvens. I Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht för år 1926 (sid. 201) har *Fomm* beskrivit en metod att med ett elektronrör som växelströmsgenerator demonstrera den akustiska interferensen. För de läroverk som ha tillgång till erforderligt material, är metoden att livligt rekommendera. Författaren till dessa rader har använt en annan metod, som grundar sig på glimljuslampans karakteristiska egenskaper[1]. Fig. 5 visar schematiskt försöksanordningen. Stadsspänningen (220 volts likström) uppladdar över ett vätskemotstånd *M* (vanligt vattenledningsvatten med koppartrådar som elektroder) en ordinär Leydnerflaska *L*. Så snart kondensatorn uppnått den för glimljuslampans *G* tändning erforderliga spänningen, urladdas den genom lampan. Denna slocknar, när den karakteristiska minimalspänningen uppnåtts, varefter kondensatorspänningen åter stiger o. s. v. Fenomenet upprepas periodiskt. Ju mindre vätskemotståndet är, desto större blir periodtalet. Inkopplas nu i serie med lampan tvenne telefoner *T*, alstra dessa en ton, vars höjd inom vida gränser kan varieras. Den erhållna tonen är icke fullt ren, men övertonerna kunna dämpas med en parallellt till telefonerna kopplad kondensator *K*. (Ju större kapacitet parallellkondensatorn har, desto renare men samtidigt svagare blir tonen.) Bäst lämpade torde högohmiga telefoner vara. Med tvenne

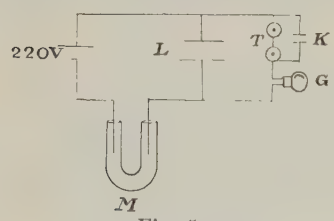


Fig. 5.

[1] Se exempelvis C. E. Bloms uppsats i denna tidskrift årgång 1922—1923, sid. 13.

telefoner om 2 000 ohm vardera och en parallellkopplad (radio)-kondensator på 5 000 cm uppnåddes god effekt. Varje lampa har sin egen »karakteristik». Olika lampor ha därför prövats. Bästa resultatet gav en 220-volts lampa av Pintsch's fabrikat. Påpekas bör, att lamporna ha utpräglat polära egenskaper.

Med nu skisserade försöksanordning kan ett öra väl uppfatta de för interferensfenomenet karakteristiska maxima och minima. Naturligtvis bör avståndet mellan telefonerna kunna varieras (från en eller annan meter ned till några decimeter).

»Vita»-glasets genomskinlighet för ultraviolett ljus.

Av K. A. WINGÅRDH.

Då det synts mig av intresse att veta huruvida det i svenska marknaden nyligen införda engelska fönsterglaset, det s. k. »Vita»-glaset, vilket uppgives vara genomskinligt för ultravioletta strålar, möjligen skulle kunna ersätta de dyrare kvartslinserna och prismorna, har jag företagit en undersökning av glaset (ställt till mitt förfogande av firman Lindbeck och Gedda i Göteborg) i nämnda hänseende.

Till följd av den tillgängliga apparaturens enkelhet kunde jag ej utföra någon kvantitativ bestämning av absorptionsförmågan vid olika våglängder, men redan de erhållna kvalitativa resultaten göra det möjligt att draga vissa slutsatser. De använda metoderna voro två a) fotoelektrisk, b) optisk.

a. En väl rengjord, nyss amalgamerad zinkskiva förbands med aluminiumbladen hos ett Exners elektroskop, vilket uppladdades negativt. Då zinkplattan sedan belystes med en båglampa utan lins och skyddsglas, avladdades elektroskopet fullständigt (spänningen sjönk från 235 V till 0) på 5 sek.

Om ett 2 mm tjockt »Vita»-glas insattes i strålarnas väg, sjönk spänningen från 235 V till i medeltal 115 V på 3 min. Om ett lika tjockt vanligt glas i stället användes, visade elektroskopets utslag ingen som helst förändring under 5 min. Båglampan matades hela tiden vid konstant båglängd med 15 A vid 60 V spänning.

Redan detta visar, att »Vita»-glaset är i någon, ehuru ganska ringa mån genomskinligt för ultraviolett ljus.

b. Ett spektrum av ljuset från båglampan åstadkoms medelst kvartslins och kvartsprisma på en fluorescensskärm. Till följd av skärmens små dimensioner kunde spektret ej göras längre än 115 mm, räknat från rött till yttersta ultraviolett, varvid det synliga spektret, rött-violett, hade en längd av 13 mm.

Ovannämnda platta av »Vita»-glas nedskar spektrets längd till 40 mm och ett vanligt glas till 20 mm. Siffrorna äro medelvärden av flera mätningar.

Härav torde den slutsatsen kunna dragas, att »Vita»-glaset endast ytterst ofullständigt genomsläpper ultraviolett ljus, varför det alltså ej lämpar sig som ersättning för kvarts i optiska apparater. Vid demonstration av olika genomskinlighet för olika strålar är det däremot synnerligen lämpligt att använda.

Några av våra fönsterglassorters förmåga att genomsläppa ultraviolett ljus.

Av FOLKE GUNNESON.

I föregående uppsats har lektor Wingårdh riktat uppmärksamheten på »vita»-glaset och dess förhållande till ultraviolett ljus. Jag vill till frågans ytterligare belysning meddela några resultat, jag erhållit vid en jämförande undersökning av en del fönsterglassorters förmåga att genomsläppa ultraviolett ljus.

Emedan fönsterglasets förhållande till solstrålningen särskilt intresserar oss, må några data angående solspektret först meddelas.

Den synliga delen av spektrum räknas ligga mellan 7 230 och 4 000 Å. E. Vid 4 000 Å. E. vidtager alltså den ultravioletta strålningen. Solspektret har under högsommaren sin undre gräns vid 2 900 Å. E. Denna gräns är variabel och beror på den vägsträcka, som solstrålarna ha att passera genom luften. Under vintern framflyttas gränsen till 3 100 Å. E. Av samma orsaker varierar den undre gränsen under dagens lopp. Den fysiologiskt verksamma delen av solstrålningen, d. v. s. den ultravioletta strålning, som åstadkommer solbränna, ligger under 3 000 Å. E.

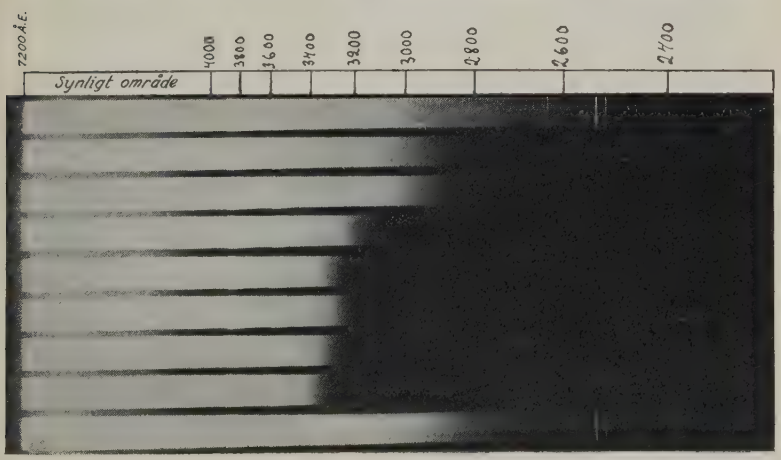
Våra fönsterglas förmåga att genomsläppa ultraviolett ljus beror dels på glastjockleken, dels på glasets kemiska sammansättning. Genom att öka kvartshalten ökas genomsläppligheten. Ren kvarts genomsläpper ultravioletta strålar ned till 1 800 Å. E. Genom tillsats av metalloxider (K_2O, Na_2O och PbO) ökas absorptionen av ultraviolett ljus. PbO

förskjuter i hög grad absorptionsgränsen åt det synliga området till.

De glassorter, som jag undersökt, äro ett organiskt glas, engelskt vita-glas samt Karlstad, Glava, Sandö och belgiskt fönsterglas. Dessutom har jag medtagit ett annat glas av okänt fabrikat. Det organiska glaset är mycket tunt, c:a 0,1 mm. För att öka hållfastheten är ett grovmaskigt metallnät insmält i detsamma.

Medelst en kvartspektrograf fotograferades en kolbåglampas spektrum. Ljuset från kolbåglampan innehåller ultravioletta strålar med våglängder, som ligga långt under solspektrets ultravioletta absorptionsgräns. Den fotografiska plåten kunde förskjutas i vertikalled. Genom att välja en lämplig spalthöjd kunde jag på samma plåt göra nio upptagningar. Exponeringarna 1 och 9 (fig.) visa kolbågsspektret. Vid de mellanliggande exponeringarna placerades det glas, som skulle undersökas, mellan ljuskällan och spektrografens spalt.

Jämföra vi upptagningarna 2—8 med 1 och 9, finna vi, att glasen absorberat en del av den ultravioletta strålningen. Denna absorption är olika hos de olika glassorterna. Det organiska glasets och vita-glasets absorptionsgränser ligga vid kortare våglängder än fönsterglasens. I tabellen åter-



givas de uppmätta absorptionsgränserna jämte glastjockleken. Exponeringstiden var vid samtliga upptagningar 4 sekunder.

Upptagning n:r	Glassort	Tjocklek i mm	Absorptionsgräns
1	Kvarts	—	—
2	Org. glas	0,1	2 720 Å. E.
3	Vita-glas	2,3	2 720 »
4	Karlstad	2,2	3 110 »
5	Sandö	2,3	3 200 »
6	Glava	2,0	3 180 »
7	Belg. glas	1,9	3 220 »
8	?	2,5	3 260 »
9	Kvarts	—	—

Absorptionsgränsernas lägen äro beroende av ljusintensitet, exponeringstid och plåtens ultravioletttkänslighet. Den vid upptagningarna använda plåten var pankromatisk. Strömstyrkan genom kolbågen var vid samtliga exponeringar 4 ampère.

Jämföras exponeringarna 1 och 9 (fig.), finner man, att båglampans ljusstyrka varierat något. Ytterligare två upptagningar visa emellertid, att de i tabellen införda absorptionsgränserna äro riktiga på tredje siffran när. Sammanfattas resultaten, erhållas följande avrundade värden på glasens absorptionsgränser: organiskt glas och vitaglas 2 700 Å. E., Karlstadsglas 3 100 Å. E., de övriga glassorterna 3 200 Å. E.

Till slut vill jag på det varmaste tacka föreståndaren för Statens Farmaceutiska Laboratorium, d:r Herman Palme, för att han välvilligt låtit mig använda laboratoriets kvartsspektrograf, och docenten John Hertzberg för goda råd.

Några försök med högfrekvensljudvågor.

Av SVEN BENNER.

Intressanta försök med högfrekvensljudvågor ha enligt en redogörelse i Philosophical Magazine för september 1927 nyligen utförts av den kände spektroskopikern prof. R. W. Wood och A. Loomis å den senares laboratorium i Amerika. Författarna använde sig av det kända fenomenet, att en piezoelektrisk kristall (t. ex. kvarts), som placeras i ett elektriskt växelfält, omväxlande utvidgar och sammandrar sig i kraftlinjernas riktning. Den sålunda uppkommande mekaniska svängningens amplitud kan bli mycket hög, om det elektriska fältets frekvens sammanfaller med frekvensen hos en av kristallens elastiska egensvängningar, ty kristallen kommer då i resonans med växelfältet.

Kristallens återverkan på det elektriska växelfältet har på senare tid fått stor betydelse för radiotekniken såsom ett hjälpmedel för att få elektriska svängningar av konstant, hög frekvens. Kristallen inverkar emellertid även på det omgivande mediet, som genomilas av ljudvågor av samma frekvens som den svängande kristallen. Fenomenet användes redan 1917 av fransmannen Langevin, som konstruerade en apparat för lokalisering av undervattensbåtar, djupmätning m. m., varvid tiden mättes mellan utsändandet av en kort högfrekvent ljudsignal och återkomsten av det från undervattensbåtens skrov eller havsbottnen kommande ekot. Då vågornas absorption i vatten växer hastigt med frekvensen, använde Langevin ej högre frekvenser än 30—40 000. Att han gick så högt berodde mest på att man kan få ett desto skarpare begränsat strålknippe ju mindre våglängden är. I det här refererade arbetet

gällde det att undersöka fenomenen i närheten av ljudkällan, och frekvenser om 2—500 000 kunde därför användas. Den höga frekvensen gör, att svängningsamplituden trots den stora energin är mycket liten, av samma storleksordning som en ljusvåglängd. Svängningarna äro, som prof. C. V. Boys uttryckte det, »*bara* acceleration och *ingen* rörelse».

Som strömkälla fungerade en rörsändare om 2 kW. Den primära svängningskretsen bestod av en spole av grov litztråd lindad i ett tiotal varv, några oljekondensatorer och en stor luftvridkondensator. Primärspolen omgav en sekundärspole om ett par hundra varv och inducerade i denna en spänning om upp till 60 000 volt. Denna spänning kopplades mellan en metallplatta, på vilken en kvartskristallplatta låg, och en mycket tunn mässingsplåt ovanför kristallen. Det hela befann sig i en flat skål med transformatorolja. De från kristallen utgående vågorna reflekterades antingen mot den fria vätskeytan eller mot en horisontell glasskiva, som fördes ned i vätskan. Vid vissa bestämda värden på avståndet från kristallen till den reflekterande ytan utbildades intensiva stående vågor på samma sätt som i Kundts rör. Strålningstrycket mot glasplattan, vars diameter var 8 cm, kunde då uppgå till 150 gf eller 3 gf/cm^2. Förde man plattan långsamt allt närmare kristallen, kände man periodiskt ett motstånd av nyssnämnda storlek, alldeles som om plattan arbetade sig genom den ena sega hinnan efter den andra. Avståndet mellan två successiva lägen med högt strålningstryck är tydligen lika med ljudvågornas halva våglängd, varför fenomenet kan utnyttjas för mätning av vågornas fortplantningshastighet i vätskan. Det befanns dock lämpligare att för mätningen utnyttja svängningens återverkan på kristallen, vilken återverkan kan påvisas på elektrisk väg. Den varierar vid plattans förskjutning på samma sätt som strålningstrycket.

Då kristallen arbetade mot den fria vätskeytan, bildades på denna en flera cm hög kulle, vars topp utslungade

oljedroppar som en miniatyrvulkan. Det lyckades i ett fall att driva upp kullens höjd till 10 cm, men påfrestningen blev då för stor för kristallen, och den rämnade i en mängd småbitar. Glasrör, stavar eller plattor, som delvis doppades ned i oljan, försattes i intensiva transversella svängningar, som lätt påvisades t. ex. genom att beströ föremålen med nikt. Det var då lätt att mäta fortplantningshastigheten och visa, att den växte med plattans eller stavens tjocklek. En metod att mera permanent registrera de stående vågorna i en stav var att vid dess ena ände smälta fast litet rött vax och doppa ned den andra i oljan. Friktionen mellan den svängande staven och vaxklumpen blev så stor, att vaxet smälte närmast staven, varför vaxklumpen så småningom gled ned och lämnade efter sig en serie ringar av stelnat vax vid noderna.

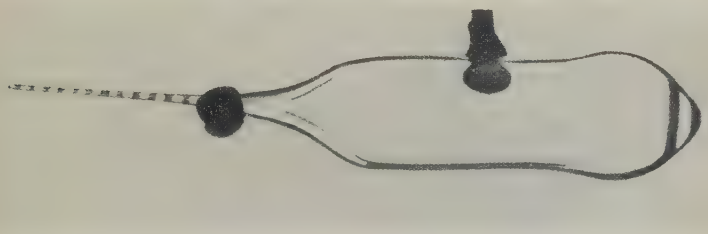


Fig. 1. Glasstav med vaxringar avsatta vid noderna.

Den nämnda upphettningen av en kropp i beröring med en svängande glasstav kunde bli mycket intensiv. En trästicka, som pressades mot staven, började snart ryka, och ett hål med förkolnade kanter borrades hastigt genom den. Glasstaven kunde t. o. m. äta sig genom en glasskiva; mikroskopisk undersökning av det uppstående borrpulvret visade, att det åtminstone delvis bestod av små smälta glaskulor.

Vätskor och fasta kroppar, som genomilades av vågorna, uppvärmdes ofta ganska avsevärt. Så lades t. ex. ett stycke is i en bägare vatten, som redan innehöll små isbitar och alltså befann sig vid 0°. Bägaren sänktes delvis ned i

oljan, så att vågorna gingo genom vattnet och isen. Efter två minuter var isstycket så mört, att det kunde kramas sönder mellan fingrarna, beroende på att det delvis smält inne i massan, antagligen vid gränsen mellan de olika kristallerna. Försöket lyckades ej med naturlig is, som består av mycket större kristaller än den konstgjorda. Smältningen inne i ismassan kunde direkt visas genom att låta med fluorescein färgat vatten frysa och utsätta den bildade isen för vågorna under 30 sek. Före försöket var isbiten gulfärgad och fluorescerade ej, beroende på att färgämnet ej var i lösning. Efter försöket befanns den vid undersökning i solljus mot mörk bakgrund vara genomsatt av en mängd grönt fluorescerande plan, längs vilka isen smält och färgämnet gått i lösning.

Vid beröringsytan mellan två ömsesidigt olösliga vätskor bildades emulsioner, tydligen genom att fina droppar av det ena ämnet slungades in i det andra. Sådana, mer eller mindre stabila, emulsioner i vatten framställdes av olja och kvicksilver samt även av vissa fasta ämnen (paraffin, stearinsyra och lättsmälta metallegeringar). Omkring ett vibrerande glasrör, där energin koncentrerats på en liten volym i en förträngning, bildades ett moln av ytterst fina oljedroppar, om litet olja fick rinna ned längs röret mot förträngningen. Oljan samlade sig i små högar, ordnade i ett visst mönster, från vilka fina droppar sprutade ut. Det var ett ganska vackert skådespel att tända på detta oljemoln och observera det miniatyrfyrverkeri, som uppstod och som varade så länge oljan räckte.

En ganska oväntad användning av svängningarna har man fått vid analys av jordprover. De vid kornen adsorberade kolloiderna måste annars frigöras genom att provet skakas häftigt med vatten och centrifugeras 20—30 gånger. Använde man högfrekvensljudvågorna, medförde redan några minuters behandling med dessa så häftig omskakning, att kolloiderna frigjordes fullständigt. Andra verkningar av vågorna äro frigörandet av i vatten löst luft (ej genom vattnets uppvärmning, ty luftblåsorna visade sig innan

temperaturen hunnit stiga nämnvärt), påskyndande av vissa kemiska reaktioner, inledande av kristallisation i övermättade lösningar samt agglomerering av i vatten suspenderade partiklar, såsom fint sågspån. Det sistnämnda fenomenet förklarade författarna så, att två partiklar i närheten av varandra delvis skydda varandra för strålningstrycket, som därför för vardera partikeln får en mot den andra riktad resultant. Fenomenet skulle alltså nära sammanhänga med Bjerknes' bekanta hydrodynamiska försök.

Författarna observerade även en del fysiologiska verkningar av vågorna. Vissa encelliga djur, Spirogyraalger m. m. sletos formligen sönder, likaså röda blodkroppar. Små fiskar och grodor i kolvar med iskylt vatten, vilka delvis doppades ned i oljan, dödades på ett par minuter, något, som redan Langevin observerat. Orsaken är ej klar, men sökes av författarna i upphettning av kropparna genom inre friktion. Det kalla vattnet är ej tillräckligt skydd mot sådan upphettning. Råttor voro mindre ömtåliga. En var efter 20 minuters exposition så medtagen, att den knappt kunde gå, men den hämtade sig snart. Ett tydligt symtom

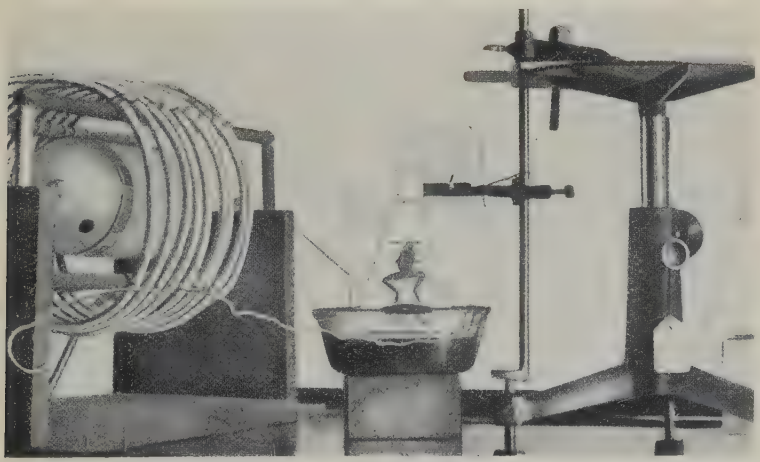


Fig. 2. En del av försöksanordningen. T. v. primärspolen och inuti den sekundärspolen, i mitten oljebadet och en groda under behandling.

var minskning av de röda blodkropparnas antal med upp till 40 %, men detta behöver ej vara någon direkt verkan av vågorna, då samma symtom framkallas av skrämsel. Om vågornas verkan på människor nämna författarna egentligen endast den hetta man känner, då man tar på en vibrerande glasstav. Beröring av en sådan kan ibland framkalla rätt svårläkta sår.

Radioaktiviteten och jordens historia.

(Referat av O. HAHN: Was lehrt uns die Radioaktivität über die Geschichte der Erde? Berlin 1926.)

Det viktigaste problemet i jordens historia är frågan om dess ålder, men för att frågan skall få någon mening och kunna bli föremål för vetenskaplig forskning, måste man fastlägga ett begynnelsetillstånd, varifrån denna ålder skall räknas. Med bortseende från de tidrymder, då jorden var gasformig eller glödflytande, betrakta vi sålunda som jordens ålder den tid, varunder jorden utgjort en självständig del av vårt solsystem med sin nuvarande massa och ungefär sin nuvarande volym. Beräknandet av denna tid är en av de intressantaste och vackraste tillämpningarna av den radioaktiva forskningen.

Redan före radioaktivitetens upptäckande hava många försök gjorts att på fysikalisk eller geologisk väg beräkna jordens ålder. Utgående från ett jordklot med bestämd, hög yttemperatur, som genom utstrålning till världsrymden avkyles till den nu rådande yttemperaturen, kan man med kännedom om den geotermiska gradienten och bergarternas genomsnittliga värmeledningsförmåga beräkna den tid, som åtgått härtill. KELVIN, som först utförligt sysslade med dessa frågor, kom i sina senare arbeten till värden mellan 20 och 40 millioner år, med företräde för den lägre siffran. Riktigheten av de Kelvinska beräkningarna har bekräftats i ett nyare arbete (1911) av L. R. INGERSOLL och O. I. ZOBEL, som finna, att 22 millioner år hava förflutit från den tidpunkt, då jordens yta hade en temperatur av 1 000°, under förutsättning, att inga andra energikällor

än jordens eget värmeförråd bidragit till att hålla temperaturen uppe.

Geologerna välja en annan utgångspunkt för definitionen av jordens ålder, nämligen begynnandet av den oceaniska bergartsavlagringen och flodernas koksalttransport till havet. Vid denna tid var således jordens yta stelnad och världshaven bildade; temperaturen var ej väsentligt högre än nu. Den på detta sätt definierade åldern måste naturligtvis vara mycket lägre än den av fysikerna på ovannämnda sätt beräknade. Om man bestämmer massan av de sediment, som floderna årligen medföra till haven och uppskattar totalmassan av alla sedimentbergarter, som bildats sedan avlagringarnas början, får man enkelt den tid, som sedan dess förflutit. Eller om man dividerar världshavens totala saltmängd med den årligen tillförda saltmängden, erhålles likaledes jordens ålder, räknat från världshavens bildning. Som medelvärden av ett stort antal uppskattningar ha erhållits ur sedimentbestämningar 90 millioner år, ur salthalten 95 millioner år. Alltså betydligt högre värden än det av Kelvin för en längre utveckling beräknade.

Paleontologerna åter uppskatta en ännu mindre del av jordens utvecklingshistoria, nämligen den tid, som åtgått för de organiska formernas utveckling till det nuvarande tillståndet, vilken utveckling ej kan hava insatt, förrän jorden haft en lång tid som planet bakom sig, till över 100 millioner år. Man finner, att svaren på frågan om jordens ålder äro lika många som sätten att söka dessa svar.

Om de bidrag, som den radioaktiva forskningen kan lämna till frågans besvarande, kan man på förhand säga, att de i fråga om säkerhet och beviskraft måste stå betydligt över alla andra. Och detta sammanhänger med de radioaktiva processernas egenskap av att vara interatomistiska förlopp, de avspela sig i atomkärnan, och atomkärneprocesser äro oberoende av alla, icke alltför fantastiskt extrema yttre fysikaliska och kemiska betingelser. Med bestämdhet kan man påstå, att de radioaktiva för-

loppen under jordens tidigare utveckling försiggått enligt samma lagar och med samma hastighet som nu.

Om vi kunna bestämma de totala verkningarna av radioaktiva förlopp i den fasta jordskorpan och känna den hastighet, varmed dessa processer äga rum, så kan tidrymden för dessa verkningars åstadkommande icke blott skattas, utan noga avläsas och kontrolleras.

Det är väsentligen tre fenomen, som kunna begagnas för en beräkning av jordens ålder och besvarandet av andra geologiska frågor. För det första: bildningen av inaktivt bly som slutprodukt av såväl urans som toriums omvandlingar. I ett radioaktivt mineral kommer därför under tidernas lopp blyhalten att växa på ett lagbundet sätt. För det andra: bildningen av alfapartiklar. Dessa utslungas med stor hastighet vid atomomvandlingen, men hejdas mycket snart vid passagen genom materie, upptaga elektroner och övergå till heliumatomer, som stanna kvar i det radioaktiva ämnet, som kommer att långsamt anrikas på helium. För det tredje: alfapartiklarnas rörelseenergi, som på grund av deras stora hastighet är mycket betydande, övergår vid partiklarnas bromsning till värme. På de båda första fenomenen bero direkta bestämningar av jordens ålder, varvid särskilt blymetoden kan göra anspråk på att ge säkra resultat. Värmeproduktionen ger oss en inblick i jordens värmehushållning; den är en faktor, vartill Kelvin i sina beräkningar ej kunde taga hänsyn, eftersom de radioaktiva ämnena då ej voro upptäckta, men som skall visa sig i hög grad ägnad att förlänga den av Kelvin beräknade avkylningstiden. Värmeutvecklingen synes också spela en viktig roll vid bergskedjebildningen.

Jordens ålder, beräknad ur mineralens heliumhalt. De snabbaste alfastrålarna hava en räckvidd av 8,5 cm i luft, i ett mineral bromsas de naturligtvis efter en mycket kortare väg eller några hundradels mm. Då alfapartiklarna förlorat sin laddning och hastighet, kvarstanna de således, om de bildats av atomer i ett minerals inre, som heliumgas i detta, och mängden härav tillväxer med tiden och i

mån av mineralets halt av radioaktiv substans. I själva verket upptäcktes ju också helium i ett radioaktivt mineral, och senare undersökningar ha visat, att alla radioaktiva mineral och endast sådana innehålla helium.

1 g uran i jämvikt med sina omvandlingsprodukter emitterar 90 000 heliumatomer i sekunden, d. v. s. $2{,}8 \times 10^{12}$ atomer eller 10^{-7} cm^3 heliumgas per år. Med samma hastighet har denna produktion försiggått, alltsedan mineralet utkristalliserade i den fasta jordskorpan. Man kan säga, att denna heliumvolym, 10^{-7} cm^3, är en mineralets årsring, och vi hava blott att räkna dessa för att avläsa mineralets ålder. 1 cm^3 heliumgas pro g uran anger således redan en tidrymd av 10 millioner år, men då nu mineral finnas, som innehålla upp till 50 cm^3 helium, så måste man sluta sig till en ålder för dessa av 500 millioner år. Härvid måste dock en korrektion anbringas för uranets minskning genom sönderfallet, men detta sker så långsamt, att korrektionen endast för mycket gamla mineral spelar någon roll.

En viktig felkälla vid dessa beräkningar är givetvis en långsamt skeende heliumförlust genom diffusion. För ett radioaktivt mineral, som ligger öppet i luften, är en heliumutveckling påvisad; vid pulverisering kan mineralet förlora upp till 30 %. I jordens inre är en diffusion visserligen säkert obetydlig, men i alla fall en faktor att räkna med. I vissa fall, nämligen då radioaktiva mineral eller bergarter av hög temperatur gränsa till sprickor eller hålrum, är heliumavgången säkerligen avsevärd. På detta sätt torde de stora heliummängder ha uppstått, som utvinnas vid många amerikanska och kanadensiska bergolje- och naturgasfyndigheter.

Vi kunna med visshet säga, att mineralen ej innehålla mera, utan mindre helium, än som motsvarar deras ålder. Heliummetoden bör ge för lågt värde på mineralens ålder. I nedanstående tabell 1 ges en översikt över heliumhalten (i cm^3 pro g uran) av ett antal mineral från olika geologiska perioder och deras därur beräknade ålder.

Tabell 1.

System	Mineral	cm^3 helium pro g uran	Ålder i mill. år
Pliocen	Zirkon	0,146	1,5
Miocen	»	0,57	5,7
Oligocen	Siderit	0,70	7
Perm	Zirkon	3,80	38
Övre karbon	Limonit	12,8	128
Devon	Hämatit	11,2	112
Silur	Torianit	22,6	226
»	»	21,2	212
Övre prekambrium	Zirkon	25,0	250
Mellanprekambrium	Titanit	32,9	330
»	»	38,2	385
Undre prekambrium	Zirkon	54,3	550
» »	Titanit	56,1	570

Tabellen visar överensstämmelse mellan de på radioaktiv väg erhållna resultaten och den inom geologien fastställda åldersföljden. De äldsta här undersökta bergarterna visa en ålder av 600 millioner år. Om man får antaga, att i de heliumrikaste mineralen hälften därav gått förlorad genom diffusion, skulle dessa minerals verkliga ålder vara dubbelt så hög. Man erhåller då ett värde, som stämmer med de enligt den tillförlitligare blymetoden vunna.

Jordens ålder, beräknad ur mineralens blyhalt. De radioaktiva omvandlingarnas slutprodukt, bly, är inaktiv och svårflyktig; den sönderdelas ej vidare och ackumuleras i mineralet. Då nu 1 ton uran per år ger något mer än 0,1 mg bly, behöva vi, liksom i fråga om helium, endast bestämma mineralets totala blyhalt per g uran för att kunna beräkna dess ålder.

I motsats mot helium är bly icke flyktigt, och det är mycket osannolikt, att ett av vittring eller kemiska förändringar opåverkat mineral skulle förlora något av sin blyhalt. Den på detta sätt beräknade åldern är med all säkerhet icke för låg. Den är tvärtom med all sannolikhet

alldeles för hög, om man icke tar hänsyn till möjligheten, att icke allt bly är av radioaktivt ursprung.

Denna svårighet övervinnes genom en bestämning av blyets atomvikt. Bly ur uran har en atomvikt av $238 - 8 \times 4 = 206$, medan det vanliga, i stora mängder förekommande blyet har en atomvikt $= 207{,}2$. Ur en experimentell precisionsbestämning av atomvikten för det ur mineralet avskilda blyet kan man då lätt beräkna, hur mycket därav är uranbly och hur mycket vanligt bly. Ur halten av uranbly, jämförd med totala uranhalten, kan sedan mineralets ålder beräknas på följande sätt. Urans sönderfallshastighet är $= 1{,}4 \times 10^{-10}$ per år, d. v. s. på ett år sönderfaller så stor bråkdel av den förhandenvarande uranmängden. 1 g uran bildar således på ett år $1{,}4 \times 10^{-10} \times \frac{206}{238} = 1{,}21 \times 10^{-10}$ g bly. Om blymängden per U g uran är Pb g, så är mineralets ålder $t = \frac{Pb}{1{,}21\,U} \times$ $\times 10^{10}$ år $= \frac{Pb}{U} \times 8\,200$ millioner år. Vid mycket gamla mineral måste hänsyn tagas till urans sönderfall, eftersom den uranhalt, mineralet visar nu är mindre än den ursprungliga. Man kan då använda en empirisk formel: $t = \frac{Pb}{U + 0{,}538\,Pb} \times 8\,200$ millioner år.

Tabell 2 visar några av de resultat, som vunnits enligt blymetoden, tillämpad på mineral från mycket olika fyndorter och tillhörande olika geologiska formationer.

Man ser av denna tabell, att blymetoden ger väsentligt högre värden på de geologiska formationernas ålder än heliummetoden. Men dessa värden kunna göra större anspråk på att anses riktiga än de lägre, bl. a. av följande skäl.

Undersökas väl definierade, kristalliserade mineral från samma geologiska period, är överensstämmelsen så fullständig, att man icke kan anse metoden behäftad med

Tabell 2.

Åldersbestämningar av uranmineral enligt blymetoden.

Serie	Mineral	Fyndort	Bly / Uran	Ålder i mill. år
	Uraninit	Glastonbury, Conn. U.S.A.	0,041	
	»	»	0,042	
I	»	»	0,039	Karbon:
	»	»	0,041	335 mill. år
	»	»	0,040	
			0,041	
	Uraninit	Morogoro, Östafrika	0,094	
II	»	» »	0,092	?
			0,093	730 mill. år
	Uraninit	Anneröd, Norge	0,13	
	»	» »	0,12	
	Annerödit	» »	0,15	
	Uraninit	Elvestad, »	0,14	
	»	» »	0,14	
III	»	Skaartorp, »	0,135	Mellanprekambrium
	»	Huggenäskilen, »	0,13	1050 mill. år
	»	» »	0,12	
	Bröggerit	Moss »	0,13	
	»	» »	0,13	
			0,13	
	Zirkon	Mosambik	0,17	
IV	»	»	0,15	?
	Biotit	Sambesi	0,14	1 150 mill. år
			0,15	
	Fergusonit	Ytterby	0,17	
V	Gadolinit	»	0,15	Mellanprekambrium
			0,16	1 150 mill. år
VI	Uraninit	Villeneuve, Ontario	0,17	Mellanprekambrium 1 250 mill. år
	Cleveit	Arendal, Norge	0,19	
	Uraninit	» »	0,18	
	»	» »	0,17	Mellanprekambrium
VII	»	» »	0,17	1 350 mill. år
	Xenotim	Narestö, »	0,21	
			0,18	
VIII	Zirkon	Mosambik	0,21	Undre prekambrium 1 600 mill. år

något avsevärt fel. Detta framgår av en i tabell 3 refererad undersökning av E. Gleditsch, avseende uran- och blyhalten av 12 kristalliserade norska uranmineral av typen bröggerit från samma formation och därför sannolikt av samma ålder. Förhållandet bly : uran är anmärkningsvärt konstant.

Tabell 3.

N:r	Uran	Bly	$\frac{\text{Bly}}{\text{Uran}}$	Ålder medeltal
1	69,30	8,77	0,118	
2	66,14	9,38	0,132	
3	66,48	9,39	0,131	
4	66,34	8,92	0,125	
5	68,10	8,8	0,120	
6	63,36	8,88	0,130	
7	64,39	8,93	0,129	950 mill. år
8	66,14	9,25	0,130	
9	66,13	9,27	0,130	
10	66,58	9,23	0,129	
11	66,34	9,25	0,130	
12	61,67	8,64	0,130	

Blyhalten är den totala; atomviktsbestämningar på ett blandprov gåvo, att 90 % utgöra uranbly, 10 % vanligt bly. I proven 1 och 5 med den högsta uran- och lägsta blyhalten är halten av uranbly troligtvis större. Om så är fallet, ge även dessa prov, trots den ringare totala blyhalten samma ålder som de övriga.

Om mineralet utom uran innehåller torium, har man att taga hänsyn till att toriumbly har en beräknad atomvikt av $232 - 6 \times 4 = 208$, d. v. s. en enhet högre än för vanligt bly, och man kan icke längre utan vidare, på grundval av atomvikten, avgöra, hur mycket bly är av radioaktivt ursprung. Emellertid har Ellsworth (1925) visat, hur man genom att jämföra urans och toriums sönderfallshastigheter kan komma till en åldersbestämning även för mineral, som innehålla både torium och uran, i det 1 g torium på grund av sitt långsammare sönderfall är

ekvivalent med 0,384 g uran (motsvarande korrektion införes vid heliummetodens tillämpning på toriumhaltiga mineral). I tabell 4 sammanställas Ellsworths undersökningar av kanadensiska, prekambriska uraniniter, varvid *U* (total) betecknar $U + 0{,}384\ Th$ och åldern korrigerats för urans sönderfall.

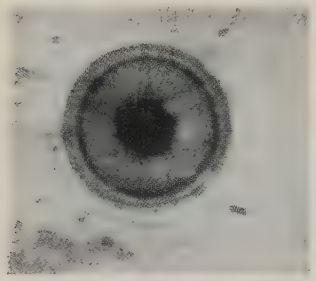
Tabell 4.

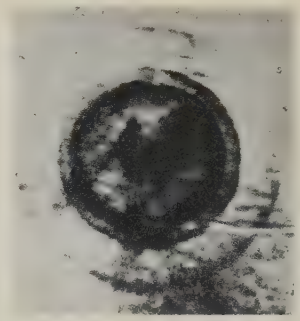
Fyndort	*U*	*Th*	*Pb*	$\frac{Pb}{U\,(\text{total})}$	Ålder
Villeneuve, Quebek	64,74	6,41	10,46	0,156	1 189 mill. år
Parry Sound, Ontario ...	69,19	2,83	10,83	0,154	1 179 » »
» » » ...	66,12	2,94	9,76	0,145	1 115 » »
Butt township » ...	66,02	1,08	9,82	0,148	1 130 » »
» » » ...	64,24	0,71	9,62	0,149	1 143 » »
Cardiff » » ...	55,26	11,92	10,25	0,171	1 299 » »

Sammanfattande kan man om de radioaktiva åldersbestämningarna säga, att de visa överensstämmelse med de av paleontologerna fordrade långa tidrymderna för det organiska livets utveckling, men att de starkt avvika från de på sedimentbildningen eller koksalthalten grundade beräkningarna. Nyare geologiska arbeten på detta område vilja emellertid korrigera de äldre uppskattningarna i riktning av en åldershöjning på grundval av mindre bildningshastighet och mäktigare sediment.

Jordens ålder, beräknad medelst de pleokroitiska gårdarna. I slipprov av många mineral, t. ex. glimmer och turmalin iakttar man stundom under mikroskopet små, färgade cirklar, som visa starkare pleokroism, d. v. s. olika färger i olika riktningar, än mineralet självt. Cirklarna äro plansnitt av små sfärer, som i sin medelpunkt hava ett ytterst litet korn av ett radioaktivt ämne. Färgningen, som icke är homogen, utan visar en följd av koncentriska ringar, orsakas av de från denna kärna utgående alfastrålarna. Den yttersta zonens radie är för en uranhaltig kärna i glimmer 0,033 mm, för en toriumhaltig kärna 0,040 mm.

Dessa radier motsvara räckvidderna för de snabbaste alfastrålarna i uran- resp. toriumserierna. De inre cirklarna motsvara långsammare strålar. I vissa flusspater uppträda dessa cirklar med sådan skärpa (se fig.), att man kunnat mäta räckvidderna för samtliga alfastrålare i uranserien, vissa av dem noggrannare än med andra metoder.





En pleokroitisk gård av samma färgintensitet som en naturlig kan nu på kort tid åstadkommas genom bestrålning av mineralet med en kraftig alfastrålare, vars emission per tidsenhet är bekant. Man kan alltså bestämma, hur många alfapartiklar, som krävts för att åstadkomma den i mineralet befintliga, naturliga gården. Bestämmer man därjämte den radioaktiva inneslutningens alfastrålning per tidsenhet, har man de data, som behövas för att beräkna mineralets ålder. För en devonisk glimmer erhöllo Joly och Rutherford på detta sätt en ålder av 470 mill. år i ungefärlig överensstämmelse med blymetodens resultat.

Vid upphettning till 100° försvinna de pleokroitiska gårdarna. Av deras förekomst i ett mineral kan man draga den viktiga slutsatsen, att mineralet under flera hundra millioner år har haft samma temperatur, som nu är rådande på jordytan.

(Forts.) *G. Starck.*

Insänd litteratur.

Kosmos, Fysiska uppsatser, årg. 5. P. A. Norstedt & Söner Stockholm 1927, 184 sid., 10 kr häft.[1]

Femte bandet av Svenska fysikersamfundets årsbok, som nu utkommit, innehåller ett flertal intressanta uppsatser från skilda områden av fysiken.

Docenten Axel Lindh skildrar professor M. Siegbahns röntgenspektroskopiska undersökningar och upptäckter. Han lämnar därvid först en orienterande överblick över röntgenspektroskopiens utveckling fram till den tid, 1914, då de första röntgenarbetena påbörjades av Siegbahn vid Lunds universitet, och skildrar sedan, hur det vetenskapliga arbetet vid institutionen under den unge prefektens ledning nådde en utveckling som aldrig förut. Man förvånas över det jättearbete som nedlagts och den precision som uppnåtts. Mätmetoderna ha nu utvecklats, så att våglängderna hos röntgenljus kan bestämmas med en noggrannhet på mindre än en billiondels millimeter. Dessa noggranna och systematiska mätningar ha icke blott lämnat värdefulla bidrag till kännedomen om röntgenspektra, utan ha även blivit av stor betydelse för andra områden av fysiken. Så t. ex. utgöra Siegbahns mätningar en av de nödvändigaste grundvalarna för den moderna atomteorien. Då man med stor sannolikhet kan vänta ett fortsatt framgångsrikt forskningsarbete under Siegbahns ledning, bör det vara av stort

[1] Kosmos' redaktion önskar meddela, att inbundna exemplar av skriften jämte kvitto å medlemskap i svenska fysikersamfundet för åren 1927—28 inom den närmaste tiden komma att tillställas samfundets medlemmar mot postförskott à 10 kr. Tidigare medlemmar, som ändrat adress sedan 1924, och de, som nu önska inträda i samfundet anmodas meddela detta till professor G. Borelius, Tekniska Högskolan, Drottninggatan 95 A, Stockholm.

intresse för Kosmos' läsare att taga del av vad som hittills uträttats.

Professor G. Borelius redogör för undersökningar av metalliska blandkristaller, utförda vid Tekniska Högskolans fysiska institut. Undersökningarna omfatta bestämningar av blandkristallernas termoelektriska egenskaper, elektriska motstånd, värmeledning, värmeutvidgning och gitterstruktur och gå ut på att finna lagarna för blandkristallernas fysikaliska egenskaper och deras beroende av temperatur, koncentration och atomfördelning. Frågan om atomfördelningen har under de senaste åren varit mycket aktuell beroende på att den kände kemisten Tammann framkastat det antagandet, att atomfördelningen i allmänhet skulle vara ordnad, om legeringen blivit tillräckligt långsamt avkyld ur smältan. Borelius och hans medarbetare ha kommit till det resultatet, att atomfördelningen i allmänhet är oordnad, men att en del blandkristaller ha ordnad atomfördelning, samt att en oordnad fördelning genom upphettning kan bli mer eller mindre ordnad, om legeringen ligger inom ett område, där ordnad atomfördelning är möjlig. Som bekant gå de rena metallernas motstånd mot noll vid absoluta nollpunkten. För legeringar däremot existerar ett tilläggsmotstånd, som visat sig vara oberoende av temperaturen. Detta tilläggsmotstånd försvinner vid legeringar med ordnad atomfördelning; övergår atomfördelningen från ordnad till oordnad, inträder en motståndsändring.

Bland övriga bidrag märkes den föreläsning, som professor J. Koch höll vid tillträdande av professuren i fysik vid Lunds universitet. Den handlar om dispersion och materieforskning och belyser den dualism, som för närvarande råder inom optiken mellan två till synes nästan oförenliga teoretiska åskådningar, vågrörelseteorien och kvantateorien. Den klassiska teorien kan på ett förträffligt sätt tyda interferens- och dispersionsfenomenen, men den kommer till korta vid behandling av lagarna för ljusstrålningen och räcker ej till för att uppställa relationer mellan

dispersionskonstanter och molekylarstorheter. Även på detta område göra sig nu resultaten av den moderna atomforskningen gällande. Man läser med intresse Kochs redogörelse för de ansatser, som blivit gjorda för att införliva även dispersionen med kvantateorien.

Fil. lic. A. Larsson behandlar den synnerligen intressanta frågan om röntgenstrålarnas spegling och brytning och omnämner ett flertal försök, som gjorts på detta område med negativt resultat. Frågan är nämligen av mycket gammalt datum. Först nu, c:a 30 år efter Röntgens upptäckt, har det lyckats Siegbahn och hans medhjälpare att påvisa röntgenstrålarnas brytning i ett glasprisma och göra detta fenomen tillgängligt för mätningar. Man får också förklaring till att försöken förut misslyckats, när man hör, att brytningsindex för glas vid en våglängd av 1,933 Å. E. är 0,999988.

Civilingeniör R. Thoreus redogör för nyare mätningar inom området för den långvågiga röntgenstrålningen och omtalar, att Uppsalafysikerna lyckats utvidga det kända våglängdsområdet från 13,3 till 23,7 Å. E. Betydelsen av dessa mätningar är dock ej den, att man funnit våglängder, som äro några Ångströms-enheter längre än de förut kända, utan den, att dessa spektra visat sig vara av stor betydelse för studiet av atomernas byggnad. Inom de olika serierna ökas nämligen våglängden från element till element med avtagande atomvikt och ju längre ned man kommer i det periodiska systemet, dess enklare blir atomernas byggnad och härigenom ökas möjligheten att göra nya viktiga rön.

Professor L. Vegard i Oslo skildrar sina senaste intressanta undersökningar över norrskenet. Vad han särskilt tager hänsyn till i föreliggande uppsats är, att själva ljusprocessen beror på de ämnen, som finnas i atmosfärens högsta lager. Föreställningen, att atmosfären i norrskensregionen (100 km över jordytan) skulle bestå av de lätta gaserna väte och helium, vilar enligt Vegard på mycket lös grund. Genom studiet av norrskenets spektrum ledes han till det

antagandet, att de översta skikten av jordens atmosfär bestå av mycket små elektriskt laddade, fasta kvävepartiklar, som drivas i höjden av en »elektrisk opdrift». För att experimentellt bevisa riktigheten av detta antagande har han vid det bekanta köldlaboratoriet i Leyden framställt kväve i fast form vid heliumtemperatur och bombarderat detta med katodstrålar. Därvid alstrades ett grönaktigt ljus, vars spektrum visade sig vara identiskt med det typiska norrskensspektret.

Av det anförda torde framgå, att det nyutkomna bandet av Kosmos innehåller flera intressanta uppsatser, som belysa de allra senaste framstegen inom fysiken.

C. Bergholm.

Erik Nilsson, *Laborationsuppgifter i allmän fysik och värmelära*, P. A. Norstedt & Söners förlag 1926, 32 sid., häft. 1 kr. 20 öre.

Häftet, som innehåller beskrivningar av ett trettiotal elevlaborationer av vanlig typ, genomgångna vid Falkenbergs kommunala mellanskola, »avser att förkorta tiden för elevernas instruerande och vara dem till ledning dels under laborerandet och dels vid avfattandet av laborationsprotokollen.»

Till förtydligande av beskrivningarna ha bifogats ett tjugutal fotografier av elever i arbete med resp. apparater, en verkligt god idé; se t. ex. fig. 4, som visar den rätta ställningen vid vägning. Men goda idéer kunna utnyttjas till överdrift, och så har skett här. I flera fall skulle en enkel, schematisk ritning ha givit mycket klarare besked än fotografierna nu göra. Dessa framhäva ofta mer de laborerande än apparaterna.

Beskrivningarna äro klara och koncisa. Dock må påpekas, att rubriken och texten till exp. 24 är missvisande. Eleven får den uppfattningen, att han bestämmer den värmemängd, som *lågan avgiver*, då han ju endast bestämmer, vad det uppvärmda *kärlet mottager*. Vidare borde i exp. 29 fram-

hållas, att det värde på en lågas temperatur, som bestämmes kalorimetriskt — ett kopparstycke uppvärmes i en låga och nedföres i en kalorimeter — är avsevärt lägre än lågans verkliga temperatur.

C. E. Blom.

Hj. Nilsson och G. H. Gustafson, *Fysik och slöjd.* P. A. Norstedt & Söners förlag, 1927. VIII + 111 sid. Kr. 4: 50.

Den svenska slöjdundervisningen åtnjöt länge stadgat världsrykte. Med tiden tycktes den dock stelna i formerna, och det är först helt nyligen, som den lyckats frigöra sig från de ursprungligen fastställda modellerna och sökt närmare kontakt med det praktiska livet. Numera kan man därför vid skolavslutningarna, då resultaten av årets slöjdundervisning utställas, få se överraskande väl utförda möbler och husgeråd av olika slag och ibland även fysikaliska instrument och apparater.

I själva verket är den konstellation, som synes i rubriken här ovan, mycket naturlig. Båda ämnena avse ju i högsta grad att främja ungdomens självverksamhet. Experimenterandet ligger pojkarna i blodet, och en slöjdundervisning, som hjälper dem att tillfredsställa experimentbegäret, måste av dem omfattas med största intresse och följaktligen bliva mycket fruktbärande. En fysikaliskt betonad slöjdundervisning bibringar eleven icke endast ökade och säkrare kunskaper i fysik, utan även den händighet, den manuella färdighet, som är så värdefull för varje människa och i all synnerhet för den blivande fysikern och ingenjören.

På sina håll har nog ett samarbete mellan lärare i fysik och i slöjd etablerats, men det är skäl att låta detta samarbete bli mer omfattande och framför allt vanligare. Därvid torde det föreliggande häftet, författat av seminarierektor Hj. Nilsson och slöjdläraren G. H. Gustafson, bliva till stor nytta.

Här har samlats ett betydande antal i det stora hela tillräckligt utförda och tydligt illustrerade beskrivningar på

tillverkningen av apparater från fysikens olika områden. Början göres med ett trästativ, som sedermera utnyttjas vid en mängd försök, men närmast användes till en balansvåg. Mekaniken företrädes för övrigt av ett femtiotal apparater, varibland märkas olika slag av vågar, lutande plan, pendlar, centrifugalapparater, provrörsställ, areometrar, vattenturbiner och flygplan. Inom värmeläran belysas bl. a. en del försök rörande kroppars utvidgning och värmeledningsförmåga. Dessutom får man lära sig att förfärdiga olika ångturbiner och en ångmaskinmodell. Elektricitetsläran är naturligtvis synnerligen väl företrädd. Här finner man bl. a. beskrivningar på olika elektroskop och galvaniska element samt en hel del försök, där ljusledningen användes som strömkälla. Vidare skildras, hur man gör en telegrafapparat, ampèremetrar, motstånd av olika slag, elektriska motorer, ringklockor och induktionsapparater, samt till sist en radiomottagare, där den tillhörande figuren dock kunde ha varit tydligare. Våra radioentusiaster komma nog att anse den sistnämnda apparaten väl enkel, men utan tvivel är den fullt användbar. Även akustiken får vara med på ett hörn. Ett monokord, dock utan resonanslåda, en skiva för klangfigurer samt olika resonansrör exemplifiera detta gebit. Häftet avslutas med en del optiska apparater, bl. a. kamera och kikare.

Som av denna översikt framgår, har man här icke inskränkt sig till träslöjd, utan tagit i anspråk även annat material, såsom papp, kork, glas och metall. Inledningsvis lämna författarna också några råd angående arbeten med dessa ämnen. Apparater och experiment äro för övrigt så valda, att några dyrbara verktyg e. d. ej behöva anskaffas. Den till varje fysisk institution hörande verkstaden äger eller borde åtminstone äga de nödiga verktygen. Boken upptar en förteckning på de hjälpmedel, utöver de vid träslöjd använda, som erfordras.

Enligt författarnas förord har arbetet egentligen tillkommit för att möjliggöra en tillfredsställande fysikundervisning vid särskilt landsbygdens folkskolor, som i allmän-

het torde vara bristfälligt utrustade med fysikmaterial. För en intresserad lärare bör det vara en lätt sak att med ledning av denna bok och med sina elevers bistånd avhjälpa denna brist. Därjämte avser boken att gagna slöjdundervisningen vid folk- och realskolorna, och utan tvivel har den här en synnerligen viktig uppgift att fylla. Helt säkert kommer det förtjänstfulla arbetet dock icke att bli en handbok endast för lärarna. Med den erfarenhet, man har från skolbiblioteken, kan man förutspå, att boken skall bliva mycket efterfrågad även av skolungdomen.

*

Sedan jag skrev denna anmälan, har jag fått i mina händer ett häfte av Skola och Samhälle (årg. 1927, N:r 6), vari lektor *A. Thorup* i Horsens skrivit en artikel om »*Fysiksløjd, Et Samarbejde mellem Fysik, Kemi og Sløjd*». Han skildrar här, hur slöjden kom in i skolan, och hur ämnet där systematiserades men samtidigt inkapslades i sina egna metoder och teorier och alltmer isolerade sig från skolans övriga ämnen — i Danmark kanske i ännu högre grad än i Sverige.

Redan med tidigare arbeten har lektor Thorup ställt sig i spetsen för en reformering av sitt lands slöjdundervisning, så att denna skulle mer motsvara den moderna »arbetsskolans» principer. Det är av stort intresse att nu läsa om hur författaren sökt förverkliga sina idéer i framför allt Horsens Statsskole, där samarbete mellan slöjd, fysik, kemi, astronomi och biologi numera ingår som ett led i skolarbetet. Vanligen tillgår det så, att eleverna under slöjdtimmarna förfärdiga de apparater och tillbehör, som de sedan begagna vid undervisningen i de andra ämnena. Som utgångsmaterial användes en del småsaker, som annars bruka gå i soptunnan, men här förvandlas till magneter, elektromagneter, galvaniska element, regleringsmotstånd, motorer, ångmaskiner, turbiner, stativ, gasbrännare, karbidugnar, luftsalpeterapparater m. m.

Författaren anser sig ha nått utmärkta resultat med denna undervisning. Samtidigt med ökad händighet och skärpt iakttagelseförmåga skaffa eleverna sig ett fysikaliskt och kemiskt vetande, som sitter bättre fast än den vanliga läroboksvisdomen, därför att det är förvärvat under lustbetonat arbete. Som hemarbete få eleverna rita apparaterna och skriftligen redogöra för de utförda experimenten och de lärdomar de kunnat draga av dessa. Givetvis äro dessa skriftliga arbeten av betydelse även för undervisningen i teckning och modersmålet.

Det har även visat sig, att denna undervisningsmetod lockar eleven till att på egen hand söka fördjupade kunskaper i böcker. Författaren kan därför som ett slutmål för samarbetet mellan slöjden och de övriga ämnena uppställa att *genom manuellt arbete samt fysiska och kemiska försök väcka elevernas intresse för intellektuellt arbete och att giva dem kroppslig och intellektuell träning jämte en solid grund av praktiska kunskaper på ett sådant sätt, att de själva av egen inre drift föra sin utveckling vidare på egen hand med böckernas tillhjälp.*

Den lilla uppsatsen — 18 sidor — vilken dessutom innehåller en antydan om den kursplan, som följes, samt en del illustrerade beskrivningar av hur apparaterna utföras, är väl värd att läsas av envar intresserad.

Ernst Herlin.

T. Hagren, *Problemsamling för realskolor och kommunala mellanskolor*, 4:e uppl. P. A. Norstedts förlag, 1927. 126 sid. Inb. 1 kr. 50 öre.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

277) Två tal äro så beskaffade, att om det enas kvadrat multipliceras med 17 och det andras kvadrat multipliceras med 2, så erhållas två tresiffriga tal med siffrorna i motsatt ordning. Vilka äro dessa tal? *Iter.*

278) Sök orten för brännpunkterna till alla parabler, som ha y-axeln till styrlinje och som tangera linjen $y=2x+1$.

279) I vilken punkt av sin paraboliska bana har en projektil, sedd från kanonmynningen, sin största vinkelhastighet?

280) A och B äro två punkter på en cirkel. Att draga de parallella kordorna AA_1 och BB_1 så, att trapetset ABB_1A_1 får uppgiven yta k^2. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

281) Beräkna $2^m \cdot 2^n - (2^m)^n$, när m och n äro rötter till ekvationen $3x^2+x\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$. Svar: $-0{,}7\,7\,1$.

282) Diskutera kurvan $y=\dfrac{x^2(x-10)}{5(x-1)}$.

283) I en likbent triangel bilda basen, medianen mot sidan och sidan geometrisk serie. Beräkna vinklarna.

Svar: Basvinkeln är $81°{,}5\,8$ eller $31°{,}4\,1$.

284) Lös ekvationen

$$\frac{16}{3}\cdot \operatorname{tg} 2x = 2+\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{4}+\ldots\ldots$$

Svar: $x=11°{,}3\,1+n\cdot 180°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre allm.läroverket å Östermalm, Stockholm.

285) Basytan i en pyramid är en kvadrat $ABCD$. En sidokant $AO = AB$ är vinkelrät mot basytan. Genom en punkt P på diagonalen AC lägges ett normalplan till AC. Visa, att skärningsfigurens yta blir maximum, när $AC = 3AP$.

286) L_1, L_2 och L_3 äro tre parallella linjer. På L_1 äro givna två fasta punkter A och B, på L_2 en rörlig punkt P. AP och BP skära L_3 i A_1 och B_1 resp. Genom A_1 och B_1 dragas linjer vinkelräta mot BP och AP resp. Sök orten för dessa linjers skärningspunkt. Svar: En parabel.

Lösningar till uppg. 249, 250, 256, 257.

249) *A är ena brännpunkten till en hyperbel. B är en punkt på samma sida om den närmaste hyperbelgrenen som A. P är en rörlig punkt på hyperbeln (på den ena eller andra grenen). Var skall P ligga, för att $AP + PB$ skall bli ett minimum?* *C. A. L.*

Om A_1 är den andra brännpunkten, skall P ligga på sammanbindningslinjen A_1B. Låt nämligen P_1 vara en punkt på samma gren, så erhålles

$$P_1A_1 + P_1B > PA_1 + PB$$

eller, om $2a =$ transversalaxeln,

$$(2a + PA) + P_1B > (2a + PA) + PB$$

eller

$$P_1A + P_1B > PA + PB.$$

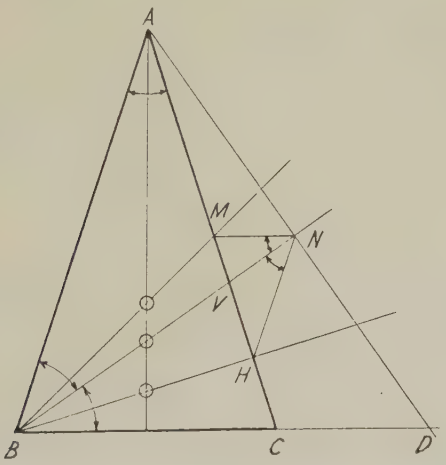
Inga lösningar inkomna.

250) *I en likbent triangel ligga höjdernas skärningspunkt, inskrivna cirkelns medelpunkt, tyngdpunkten och toppvinkelns spets harmoniskt och i angiven ordning. Sök vinklarna.*

X.

I likbenta triangeln ABC är A toppen. Drag höjden BH, bissektrisen BV, medianen BM och normalen AND mot BV. Då ligga NM och NH harmoniskt i förhållande till NA och NV enligt antagandet. Då de sistnämnda strålarna äro vinkelräta, måste NM och NH ligga symmetriskt i för-

hållande till NV (och AN). Nu är tydligen $MN \parallel BC$. Alltså måste $NH \perp AB$. Därav följer, att $\triangle AHB \cong ANB$ och $\angle BAH = \angle ABN = \frac{1}{2} \angle ABC$ d. v. s. triangelns vinklar äro 36°; 72° och 72°. *X.*



Annan lösning: Om vi sätta basen $BC = 2$ och $\angle ABC = 2v$, erhålles $AC = \frac{1}{\cos 2v}$; $MC = \frac{1}{2 \cos 2v}$; $CV = \frac{2}{2 \cos 2v + 1}$ (enligt bissektrissatsen) och $CH = 2 \cos 2v$.

Av likheten $AM : AH = MV : VH$ erhålles

$$\frac{1}{2 \cos 2v} : \left(\frac{1}{\cos 2v} - 2 \cos 2v \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2 \cos 2v} - \frac{2}{2 \cos 2v + 1} \right) : \left(\frac{2}{2 \cos 2v + 1} - 2 \cos 2v \right)$$

som ger

$$(2 \cos 2v - 1)(4 \cos^2 2v + 2 \cos 2v - 1) = 0,$$

varav

$$\cos 2v = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \cos 2v = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

där endast $\cos 2v = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ d. v. s. $2v = 72°$ kan godtagas.

C. A. L.

256) *En ellips roterar kring sin medelpunkt. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna i de punkter på ellipsen, i vilka denna skäres av en fast rät linje.*

Briot et Bouquet, Lecons de Géométrie analytique.

Till koordinataxlar taga vi två räta linjer genom ellipsens medelpunkt, den ena, x-axeln, vinkelrät mot den givna linjen, den andra, y-axeln, parallell därmed. Ellipsens halvaxlar antagas vara a, b. Vi skola då uppställa ekvationen för ellipsen, när dennas storaxel bildar en godtycklig vinkel φ med x-axeln. För detta ändamål utgå vi från läget $\varphi=0$. Ellipsens ekvation är då

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eller i polarkoordinater

$$r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2 v+a^2\sin^2 v}=\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2 v}.$$

Om ellipsen nu vrides en vinkel φ i positiv riktning, kommer radius vector att med polaraxeln (x-axeln) bilda en vinkel $\theta=v+\varphi$. Ekvationen för ellipsen i det nya läget blir då

$$r^2=\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2(\theta-\varphi)}.$$

Man får då

$$a^2r^2-c^2r^2(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)^2=a^2b^2,$$

således, genom återgång till rätvinkliga koordinater,

$$a^2(x^2+y^2)-c^2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2=a^2b^2$$

eller utvecklat

$$(a^2-c^2\cos^2\varphi)x^2-2c^2xy\sin\varphi\cos\varphi+$$
$$+(a^2-c^2\sin^2\varphi)y^2=a^2b^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Detta är således ekvationen för en ellips med medelpunkten i origo, halvaxellängderna a, b och halvstrålen genom den ena brännpunkten bildande vinkeln φ med x-axelns positiva riktning.

Man kan naturligtvis komma till denna ekvation även

på annan väg, exempelvis, med utgång från (1), genom vridning av koordinatsystemet en vinkel φ i *negativ* riktning eller genom rationalisering av det analytiska uttrycket för att summan av avstånden från den rörliga punkten (x, y) till de temporärt fasta punkterna $(\pm c\cos\varphi, \pm c\sin\varphi)$ är konstant $(=2a)$.

Genom att på sedvanligt sätt söka orten för mittpunkten till de med y-axeln parallella kordorna i ellipsen (2) erhålles för diametern ekvationen

$$\frac{y}{x} = \frac{c^2 \sin\varphi\cos\varphi}{a^2 - c^2\sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Abskissorna för diameterns skärningspunkter Q och Q_1 med ellipsen erhållas genom elimination av y mellan (2) och (3). Man får då (räkningen är mycket enkel)

$$x = \pm\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi}.$$

Om nu polen till kordan $x=k$ med avseende å ellipsen (2) betecknas med $P(x, y)$, så är QQ_1 delad harmoniskt i P och R, där R är skärningspunkten mellan diametern och kordan. Härav erhålles

$$kx = a^2 - c^2\sin^2\varphi$$

och således på grund av (3)

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - c^2\sin^2\varphi}{k}, & \ldots\ldots\ldots \quad (4) \\ y = \dfrac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{k} & \ldots\ldots\ldots \quad (5) \end{cases}$$

Det återstår nu endast att eliminera hjälpvariabeln φ mellan (4) och (5). Ur (4) erhålles

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2 - kx}{c^2},$$

således

$$\cos^2\varphi = \frac{kx - b^2}{c^2}.$$

Ur (5) erhålles

$$\sin\varphi\cos\varphi=\frac{ky}{c^2}.$$

Man har då

$$(a^2-kx)(kx-b^2)=k^2y^2$$

eller

$$k^2(x^2+y^2)-k(a^2+b^2)x+a^2b^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Den sökta orten är således en cirkel, vars skärningspunkter med x-axeln äro $x_1=\frac{a^2}{k}$, $x_2=\frac{b^2}{k}$.

Om den roterande ellipsen utbytes mot en roterande hyperbel med halvaxellängderna a, b, erhålles den motsvarande orten (orten för polen till en fast rät linje med avseende å en kring sin medelpunkt roterande hyperbel) genom att i (6) ändra b^2 till $-b^2$. Man får då ekvationen

$$k^2(x^2+y^2)-k(a^2-b^2)x-a^2b^2=0.$$

För den liksidiga hyperbeln antar ekvationen den enklare formen

$$x^2+y^2=\left(\frac{a^2}{k}\right)^2.$$

Cirkelns medelpunkt sammanfaller då med hyperbelns. För $k=\pm a$ sammanfaller cirkeln i detta fall med den över hyperbelns transversalaxel såsom diameter uppritade.

Iter.

Även löst av *X*.

257) *En rät cirkulär stympad kon, vars plana ändytor ha radierna R och r, skäres med ett plan, som genomskär mantelytan utefter en ellips, vars toppar ligga i var sin av de båda plana ändytorna. Bestäm förhållandet mellan volymerna av de båda delar, i vilka den stympade konen delas av planet.* Matematisk Tidskrift, 1923, uppg. 141.

Vi betrakta en skärning *ABCD* av den stympade konen genom dennas axel och den elliptiska sektionens storaxel *AC*. De icke parallella sidorna *AD*, *BC* i parallelltrapeziet *ABCD* utdragas (över *D* och *C*), tills de råkas i *S*. Från

S drages $SE \perp AB$. SE, som sammanfaller med konens axel, råkar AB i E, CD i F, AC i G. Vidare drages $SH \perp AC$, varigenom punkten H på AC (eller dess förlängning över C) bestämmes. Sättes $SH = h$, $\angle ESA = \alpha$, $\angle BAC = \beta$, får man efter vartannat

$$EF = (R - r)\cot\alpha,$$

$$EG = \frac{R}{R+r} \cdot (R - r)\cot\alpha,$$

$$GS = ES - EG = R\cot\alpha - \frac{R-r}{R+r} \cdot R\cot\alpha = \frac{2Rr\cot\alpha}{R+r},$$

$$h = GS\cos\beta = \frac{2Rr\cot\alpha\cos\beta}{R+r} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Betecknas vidare den elliptiska sektionens halvaxlar med a, b och halva avståndet mellan brännpunkterna med c, har man

$$a = \tfrac{1}{2}AC = \frac{R+r}{2\cos\beta}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$c = \tfrac{1}{2}AD = \frac{R-r}{2\sin\alpha}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Härur erhålles lätt ett enkelt uttryck för b. Man har nämligen

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R-r}{R+r} \cdot \cot\alpha = \frac{(R-r)\cos\alpha}{(R+r)\sin\alpha},$$

varav

$$\cos\beta = \frac{(R+r)\sin\alpha}{\sqrt{(R+r)^2\sin^2\alpha + (R-r)^2\cos^2\alpha}}$$

och således, genom insättning i (2),

$$a = \frac{\sqrt{(R+r)^2\sin^2\alpha + (R-r)^2\cos^2\alpha}}{2\sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ur (4) och (3) får man därefter

$$b^2 = a^2 - c^2 = Rr,$$

således

$$b = \sqrt{Rr}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Ytan av den elliptiska sektionen är då på grund av (2) och (5)

$$\pi ab = \frac{\pi (R+r)\sqrt{Rr}}{2\cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Volymen av den sneda kon, vars topp ligger i S och vars bottenyta utgöres av den beräknade ellipsen, är, på grund av (1) och (6),

$$K_e = \tfrac{1}{3}\pi abh = \tfrac{1}{3}\pi Rr\sqrt{Rr}\cdot\cot\alpha = \tfrac{1}{3}\pi (Rr)^{3/2}\cdot\cot\alpha .$$

Betecknas volymerna av de koner, som uppkomma genom rotation av trianglarna SEA och SFD kring SE, med K_s och K_m, får man

$$K_s - K_e = \tfrac{1}{3}\pi R(R^2 - r\sqrt{Rr})\cot\alpha = \tfrac{1}{3}\pi R^{3/2}(R^{3/2} - r^{3/2})\cot\alpha ,$$

$$K_e - K_m = \tfrac{1}{3}\pi r(R\sqrt{Rr} - r^2)\cot\alpha = \tfrac{1}{3}\pi r^{3/2}(R^{3/2} - r^{3/2})\cot\alpha .$$

Det sökta förhållandet blir således

$$\lambda = \frac{K_s - K_e}{K_e - K_m} = \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} .$$

Iter.
Även löst av *X*.

†

AUGUST SÖRENSEN.

Den 22 januari i år avled vid 57 års ålder ingenjör August Sörensen i Göteborg, och vår tidskrifts trägnaste utomredaktionelle medarbetare inom den matematiska avdelningen nedlade då för alltid sin flitiga penna. Allt sedan Sörensens namn första gången uppträdde i tidskriften finnes ej ett häfte, där han icke glatt läsaren med sina uppsatser, problem eller lösningar, de sistnämnda signerade »Iter». Redan under skoltiden fattade Sörensen kärlek till matematiken och han blev den trogen till sin död. Hans egentliga livsverk ligger på ett annat område. Vid sidan därav medhann han emellertid att utvidga och fördjupa sitt matematiska vetande, som förvisso var långt större än han med sin försynta och självkritiska läggning lät ana. Särskilt var

han intresserad av geometri, kurvteori och talteori. En tid sysslade han med iterativa processer och därmed förklarade han själv signaturen »Iter».

I yngre år hade Sörensen någon tid verkat som matematiklärare vid Knapeska stiftelsen Gustafsberg invid Uddevalla och behöll från den tiden sitt intresse för matematikundervisning och tidskrifter, som företräda densamma. I den danska Matematisk Tidskrift publicerade han under signaturen »Trudar Vide» en följd lösningar på danska språket. I vår tidskrift är det också på problemavdelningen han gjort sin största insats. Han var rik på uppslag och i besittning av en lycklig formuleringsförmåga. Ett litet urval, säkerligen av de lättaste av hans problem, ha vi bevarade i de fem sista årgångarna. Mycket road var han ock av att lösa problem. Tack vare sin stora beläsenhet och sitt utomordentliga minne igenkände han ofta i problemet någon gammal bekant från Niewenglowsky eller Rouché-Comberousse. När han ändock utarbetade sina omsorgsfulla lösningar, gjorde han det för att dela med sig av sitt rika vetande. Fyndighet i uppslaget, pedagogisk blick, oklanderlig språkdräkt och en viss gemytlig bredd över framställningen kännetecknа hans lösningar. Någon gång gav han yttryck åt en stillsam förvåning över det ringa intresse, som från lärarehåll tillsynes ägnades problemavdelningen.

Nu är han borta. Stor är saknaden för varje tidskriftens läsare, dubbelt stor för dem, som haft förmånen att få lära känna den bortgångnes originella, vinnande och vänsälla personlighet.

Josef Andersson.

Talen $\frac{\alpha^\varphi - \beta^\varphi}{2}$ och $\frac{\alpha^\varphi + \beta^\varphi}{2}$ och deras relationer.

Av KARL BLIX.

(Forts.)

Kap. 3.

Rekurrenta tal av andra ordningen.

Efter att i föregående kapitlet hava behandlat de båda specialfall av U_φ och V_φ, som uppstå då α och β tilldelas de konstanta värdena e och e^{-1} samt e^i och e^{-i} under det att φ är ett godtyckligt reellt eller imaginärt tal, övergå vi nu till ett tredje specialfall: vi antaga i det följande, *att φ är ett helt positivt tal* (0 inräknat) För att poängtera denna heltalsbetydelse av φ utbyta vi i det följande denna bokstav mot n.

Utom de i kap. 1 uppställda definitionerna:

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2} \quad \text{(I)}$$

$$V_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \quad \text{(II)}$$

$$b = \alpha\beta \quad \text{(III)}$$

införa vi följande nya: $2a = \alpha + \beta$ (IV)

$$\delta = \alpha - \beta \quad \text{(V)}.$$

I det följande antaga vi, *att α och β ej äro lika*, och på grund av (V) blir då $\delta \neq 0$.

Av (III) och (IV) följer ej blott, att $2a$ och b äro kända, om α och β äro givna, utan även att α och β kunna beräknas, om $2a$ och b äro givna, ty α och β äro rötter till ekvationen:

$$x^2 - 2ax + b = 0.$$

Denna ekvations diskriminant är:

$$4a^2 - 4b = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 = \delta^2$$

och alltså: $$a^2 - b = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Av (I) och (II) följer, med hänsyn tagen till (IV) och (V):

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= 1 \\ V_1 &= a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= 0 \\ U_1 &= \frac{\delta}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Om man i (13 c) sätter $\varphi = \frac{n+2}{2}$ och $\varphi_1 = \frac{n}{2}$, blir $\varphi + \varphi_1 = n+1$ och $\varphi - \varphi_1 = 1$ och alltså:

$$2V_{n+1} \cdot V_1 = V_{n+2} + bV_n$$

och alltså enl. (39)

$$V_{n+2} = 2aV_{n+1} - bV_n. \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Genom samma insättning i (14) och med hänsyn tagen till (39) fås:

$$U_{n+2} = 2a \cdot U_{n+1} - b \cdot U_n. \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Äro alltså $2a$ och b givna, kan man med tillhjälp av dessa båda fundamentala rekursionsformler (41) och (42) i tur och ordning beräkna alla tal $U_2, U_3, \ldots$ och $V_2, V_3, \ldots$ utgående från $U_0 = 0$ och $U_1 = \frac{\delta}{2}$, resp. $V_0 = 1$ och $V_1 = a$. Dessa tal U_n och V_n äro koefficienter i rekurrenta serier av andra ordningen[1], och det är med anledning härav, de här kallats rekurrenta tal av andra ordningen.

I stället för att begagna rekursionsformlerna (41) och (42) för beräkning av U_{-n} och V_{-n}, använder man bekvämare formlerna (4) och (5):

$$U_{-n} = -\frac{U_n}{b^n}; \quad V_{-n} = \frac{V_n}{b^n}.$$

[1] Se denna tidskrift, årg. 4, sid. 69 och årg. 6, sid. 189.

Av särskilt intresse är det fall, att alla U_n och V_n äro *hela* tal. Den första förutsättningen härför är, att $2a$ *och* b *äro hela tal*, vilket i det följande antages vara fallet.

Är $2a$ ett *jämnt* tal, d. v. s. a ett helt tal, blir på grund av (39) och (41) alla V_n hela tal. Är däremot $2a$ ett *udda* tal, gäller detta ej längre, ty redan $V_1 = a$ blir då ett bråk. Men då $2V_0 = 2$ och $2V_1 = 2a$ äro hela tal, och då enl. (41)

$$2V_{n+2} = 2a \cdot 2V_{n+1} - b \cdot 2V_n,$$

så *äro alla* $2V_n$ *hela tal.*

Då enligt (40) $U_0 = 0$ och $U_1 = \frac{\delta}{2}$, så komma alla U_n att på grund av (42) innehålla faktorn $\frac{\delta}{2}$. I stället för att syssla med talen U_n komma vi därför i det följande att taga under behandling dessa tals återstående faktorer $\frac{U_n}{\delta/2}$ och införa för dessa beteckningen $\boldsymbol{U}_n$.

$$\therefore \boldsymbol{U}_n = \frac{2U_n}{\delta}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Insättas

$$U_n = \frac{\delta}{2}\boldsymbol{U}_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

i (40) och (42), få vi efter division med $\frac{\delta}{2}$, som är tillåten, enär $\delta \neq 0$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U}_0 &= 0 \\ \boldsymbol{U}_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

och

$$\boldsymbol{U}_{n+2} = 2a\boldsymbol{U}_{n+1} - b\boldsymbol{U}_n, \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

av vilka formler följer, att *alla* $\boldsymbol{U}_n$ *äro hela tal.*

Genom insättning av (44) i (6) och (7) fås:

$$\boldsymbol{U}_{n+n_1} = \boldsymbol{U}_n V_{n_1} + V_n \boldsymbol{U}_{n_1} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$V_{n+n_1} = V_n V_{n_1} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_{n_1} \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Sättes i dessa båda formler $n_1 = 1$, får man, då $\boldsymbol{U}_1 = 1$ och $V_1 = a$:

$$V_n = \boldsymbol{U}_{n+1} - a\boldsymbol{U}_n \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \boldsymbol{U}_n = V_{n+1} - aV_n, \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

eller då enligt (46) och (41) $\boldsymbol{U}_{n+1} = 2a \cdot \boldsymbol{U}_n - b\boldsymbol{U}_{n-1}$ och $V_{n+1} = 2aV_n - bV_{n-1}$:

$$V_n = a\boldsymbol{U}_n - b\boldsymbol{U}_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \boldsymbol{U}_n = aV_n - bV_{n-1} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Dessa formler (49)—(52) lämna ett medel, att, då talen U_n äro kända, beräkna motsvarande tal V_n och vice versa.

Exempel på rekurrenta

	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I.													
$2a=3;\ b=2.$	$\boldsymbol{U}_n$	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1 023	2 047
$\because\ \alpha=2;\ \beta=1;$	$2V_n$	2	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1 025	2 049
$\delta=1.$													
II.													
$2a=1;\ b=-2.$	$\boldsymbol{U}_n$	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683
$\because\ \alpha=2;\ \beta=-1.$	$2V_n$	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1 025	2 047
$\delta=3.$													
III.													
$2a=1;\ b=-1.$	$\boldsymbol{U}_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$\because\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$													
$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2};$	$2V_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
$\delta=\sqrt{5}.$													
IV.													
$2a=2;\ b=-1.$	$\boldsymbol{U}_n$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2 378	5 741
$\because\ \alpha=1+\sqrt{2};$													
$\beta=1-\sqrt{2};$	V_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1 393	3 363	8 119
$\delta=2\sqrt{2}.$													
V.													
$2a=2;\ b=3.$	$\boldsymbol{U}_n$	0	1	2	1	−4	−11	−10	13	56	73	−22	−263
$\because\ \alpha=1+i\sqrt{2};$													
$\beta=1-i\sqrt{2};$	V_n	1	1	−1	−5	−7	1	23	43	17	−95	−241	−197
$\delta=2i\sqrt{2}.$													

Till sist meddelas några mera bemärkta exempel på rekurrenta tal av andra ordningen, uträknade t. o. m. $n=20$. I det första och andra exemplet är δ ett rationellt tal, i tredje och fjärde ett irrationellt tal och i det femte ett imaginärt tal. I alla exemplen hava både $2a$ och b små talvärden, vilket gör att de båda talen U_n och V_n ej så hastigt springa upp till höga talvärden.

al av andra ordningen.

12	13	14	15	16	17	18	19	20
4 095	8 191	16 383	32 767	65 535	131 071	262 143	524 287	1 048 575
4 097	8 193	16 385	32 769	65 537	131 073	262 145	524 289	1 048 577
1 365	2 731	5 461	10 923	21 845	43 691	87 381	174 763	349 525
4 097	8 191	16 385	32 767	65 537	131 071	262 145	524 287	1 048 577
144	233	377	610	987	1 597	2 584	4 181	6 765
322	521	843	1 364	2 207	3 571	5 778	9 349	15 127
13 860	33 461	80 782	195 025	470 832	1 136 689	2 744 210	6 625 109	15 994 428
19 601	47 321	114 243	275 807	665 857	1 607 521	3 880 899	9 369 319	22 619 537
— 460	— 131	1 118	2 629	1 904	— 4 079	— 13 870	— 15 503	10 604
329	1 249	1 511	— 725	— 5 983	— 9 791	— 1 633	26 107	57 113

Kap. 4.

Euklides' algoritm.

Innan vi övergå till att bevisa en del talteoretiska satser beträffande U- och V-serierna, må såsom inledning i korthet erinras om Euklides' algoritm för bestämmandet av den största gemensamma divisorn ($S.G.D$) — eller största gemensamma faktorn — till två tal a och $b\,(a<b)$[1].

Om vid division a går jämnt upp i b och alltså

$$b=ka,$$

så är a tydligen det största tal, som går jämnt upp i båda. Om däremot a ej går jämnt upp i b, så låt kvoten vara k_0 och resten $a_1(<a)$, så att

$$b=k_0a+a_1 \quad (\alpha).$$

Varje gemensam faktor till b och a är alltså även faktor i a_1 och alltså gemensam faktor (divisor) till a och a_1. Om nu vid division a_1 går jämnt upp i a, så blir a_1 största gemensamma divisorn till b och a. Går ej denna division jämnt upp, så låt kvoten vara k_1 och resten $a_2(<a_1)$. Sedan divideras a_1 med a_2 och man fortsätter, tills resten, som för varje ny division blir mindre, till sist måste bli $=0$. Vi få på detta sätt en kedja av ekvationer (den kallas Euklides' algoritm):

$$\left.\begin{aligned} b &= ak_0+a_1 \\ a &= a_1k_1+a_2 \\ a_1 &= a_2k_2+a_3 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= a_{n-1}k_{n-1}+a_n \\ a_{n-1} &= a_nk_n \end{aligned}\right\} (\beta).$$

Varje gemensam faktor till b och a är då också faktor i a_1, a_2, a_3, . . . a_n, och omvänt: varje faktor i a_n måste också vara faktor i a_{n-1}, a_{n-2}, . . . a_1, a och b. Och

[1] Alla bokstäver i detta och följande kap. beteckna hela positiva tal.

då tydligen a_n är den största divisorn till sig själv, så är a_n den största gemensamma divisorn (faktorn) till a och b.

Är speciellt $a_n = 1\,(n \geqq 1)$, d. v. s. uppträder vid det angivna förfarandet vid något ställe 1 som divisionsrest (och då eo ipso som sista sådan), så hava a och b den *enda* gemensamma faktorn 1. Talen a och b sägas då vara *relativa primtal* eller sakna gemensam divisor (i det man bortser från 1, som är gemensam divisor till *alla* tal).

Är a_n större än 1, så hava alltså a och b den gemensamma och tillika *största* gemensamma divisorn a_n, så att, om

$$a = a_n \cdot a' \text{ och } b = a_n \cdot b',$$

a' och b' måste vara *relativa primtal.*

Av vikt för en följande sats är att fastställa villkoret för att de båda återstående faktorerna a' och b' *båda* äro *udda* tal.

Om i ekv.:

$$b = k_0 a + a_1 \quad (\alpha)$$

k_0 är ett *udda* tal, använda vi denna likhet vid bildandet av Euklides' algoritm (β), men är k_0 ett *jämnt* tal, skriva vi (α) under formen

$$b = a(k_0 + 1) - a + a_1 \quad (\alpha'),$$

där alltså kvoten $k_0 + 1$ är ett udda tal och resten $-a + a_1$ är negativ och numeriskt mindre än a. Båda dessa ekvationer (α) och (α') sammanskriva vi i ekvationen:

$$b = ak_0 \pm a_1,$$

där alltså k_0 är ett udda tal och $a_1 < a$.

På samma sätt förfara vi i fortsättningen och erhålla sålunda ekvationskedjan:

$$\left.\begin{aligned} b &= ak_0 \pm a_1 \\ a &= a_1 k_1 \pm a_2 \\ a_1 &= a_2 k_2 \pm a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= a_{n-1} k_{n-1} \pm a_n \\ a_{n-1} &= a_n k_n \end{aligned}\right\} (\gamma).$$

där $k_0, k_1, k_2 \ldots k_{n-1}$ äro *udda* tal (k_n kan däremot vara ett jämnt tal) och $b > a > a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geqq 1$.

Att även här a_n är den största gemensamma divisorn till b och a, slutes på alldeles samma sätt som i det föregående.

Tagas nu likheterna i (γ) i omvänd ordning, blir

$$
\begin{array}{ll}
a_{n-1}=a_n k_n=s_1 a_n & \text{där } s_1=k_n \\
a_{n-2}=a_n s_1 k_{n-1} \pm a_n \;=a_n(s_1 k_{n-1} \pm 1)=s_2 a_n & \text{» } s_2=s_1 k_{n-1} \pm 1 \\
a_{n-3}=a_n s_2 k_{n-2} \pm s_1 a_n=a_n(s_2 k_{n-2} \pm s_1)=s_3 a_n & \text{» } s_3=s_2 k_{n-2} \pm s_1 \\
a_{n-4}=a_n s_3 k_{n-3} \pm s_2 a_n=a_n(s_3 k_{n-3} \pm s_2)=s_4 a_n & \text{» } s_4=s_3 k_{n-3} \pm s_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_1=a_n s_{n-2} k_2 + s_{n-3} \cdot a_n=a_n(s_{n-2} k_2 + s_{n-3})=s_{n-1} a_n & \text{där } s_{n-1}=s_{n-2} k_2 \pm s_{n-} \\
a\;=a_n s_{n-1} k_1 + s_{n-2} \cdot a_n=a_n(s_{n-1} k_1 \pm s_{n-2})=a' \cdot a_n & \text{» } a' \;=s_{n-1} k_1 \pm s_{n-} \\
b\;=a_n a' k_0 \;\pm s_{n-1} \cdot a_n=a_n(a' k_0 \;\pm s_{n-1})=b' \cdot a_n & \text{» } b' \;=a' k_0 \;\pm s_{n-}
\end{array}
$$

Då nu produkten av två tal är udda, endast om *båda* faktorerna äro udda, och summan av eller skillnaden mellan två tal är udda, endast om den ena termen är ett udda och den andra ett jämnt tal, så blir

a) om $s_1=k_n$ är ett udda tal,
$s_2=s_1 k_{n-1} \pm 1$ » jämnt »
$s_3=s_2 k_{n-2} \pm s_1$ » udda »
$s_4=s_3 k_{n-3} \pm s_2$ » udda »
$s_5=s_4 k_{n-4} \pm s_3$ » jämnt »

o. s. v.

b) om $s_1=k_n$ är ett jämnt tal,
$s_2=s_1 k_{n-1} \pm 1$ » udda »
$s_3=s_2 k_{n-2} \pm s_1$ » udda »
$s_4=s_3 k_{n-3} \pm s_2$ » jämnt »
$s_5=s_4 k_{n-4} \pm s_3$ » udda »

o. s. v.

d. v. s. i båda fallen följer på ett jämnt tal *två* udda tal. Om nu a' och b' båda äro udda tal, så måste alltså s_{n-1} vara ett jämnt tal. I fallet *a*) äro $s_2, s_5, s_8 \ldots s_{3\nu-1}$, i fallet *b*) äro $s_1, s_4, s_7, \ldots s_{3\nu-2}$ ($\nu=1, 2, 3, \ldots$) jämna tal. Då

nu s_{n-1} skall vara ett jämnt tal, så måste alltså $n-1$ vara antingen $=3\nu-1$ eller $=3\nu-2$, d. v. s. n antingen vara $=3\nu$ eller $=3\nu-1$.

Det sagda kan sammanfattas i följande

Sats: Om vid uppsökandet av största gemensamma divisorn till två tal a och b Euklides' algoritm användes med den förändring, att kvoten (den sista möjligen undantagen) alltid blir ett udda tal, varvid den positiva eller negativa resten är numeriskt mindre än föregående rest, och den största gemensamma divisorn befinnes vara a_n, där n anger antalet divisioner för uppnående av den sista resten, samt a:s och b:s återstående faktorer a' och b' båda äro udda tal, så kan n ej vara $=3\nu+1 (\nu=0, 1, 2, \ldots)$.

Anm. Är $n=3\nu$, blir den sista kvoten k_n ett udda tal, är $n=3\nu-1$, blir den ett jämnt tal.

Forts.

Några uppgifter för linearritningen.[1]

Av AGNE WAHLGREN.

I gymnasiets första och andra ringar behandlas i linear ritningen bl. a. horisontal- och vertikalprojektioner samt plana skärningar av kroppar. I de metodiska anvisningarna föreskrivas även praktiska tillämpningsövningar, allteftersom de mera teoretiska övningsuppgifterna blivit utförda. Lämpligen kunde dessa väljas med geografiskt eller astronomiskt innehåll. Allt som kan göras för att binda samman skolans olika undervisningsämnen är ju synnerligen önskvärt. Avsikten med denna uppsats är att ge några exempel på dylika uppgifter.

Uppgift 1. Att upprita gradnätet till ortogonala azimutalprojektioner (fig. 1).

Den övre figuren är en projektion av jordgloben på ett plan, lagt genom jordaxeln; EE är ekvatorn, P och P' polerna. Ju färre cirklar, som ritas i gradnätet, desto tydligare framträder metoden; jag ritar därför endast cirklar för var 30:e grad. Meridianen PEP' delas således i 6 lika delar, varefter man får breddcirklarna AA, BB o. s. v. Den undre figuren är projektionen på ett plan genom ekvatorn eller ett plan, tangerande globen i den ena polen; $E_1F_1E_1F_2$ är ekvatorn, P_1 är polen. Meridianerna bli räta linjer P_1E_1,

[1] Denna uppsats utgör en del av ett föredrag för lärarekandidater, som författaren höll under föregående vårtermin. Genom ett egendomligt sammanträffande kom några veckor senare i andra häftet för 1927 av Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht en uppsats av W. KRAMER behandlande samma ämne. Då han emellertid ej delat upp konstruktionerna på horisontal- och vertikalprojektioner, bliva hans figurer avskräckande komplicerade, om alla konstruktioner verkligen utföras, varför jag trott, att min behandling av uppgifterna fortfarande kan ha ett visst intresse. Det blir, om man så vill, ett referat av Kramers lösningar, tillrättalagda för de metoder, som vid våra läroverk användas vid undervisningen i linearritning. Därjämte förekomma några nya uppgifter.

P_1G_1, P_1L_1 o. s. v. Breddcirklarna bli cirklar, vilka man lätt finner genom att draga linjerna AA_1, BB_1. Härmed är den undre projektionen färdig. I den övre projektionen bli meridianerna ellipser, vilka konstrueras punkt för punkt. Mot t. ex. C_1 svarar en punkt på breddcirkeln AA. Man erhåller den genom att draga linjen C_1C, varvid man samtidigt erhåller C' på södra havklotet. På samma sätt dragas linjerna D_1D, G_1G; H_1H, K_1K och L_1L. (Att linjerna BB_1 och GG_1 likasom CC_1 och KK_1 måste sammanfalla, inses lätt trigonometriskt.)

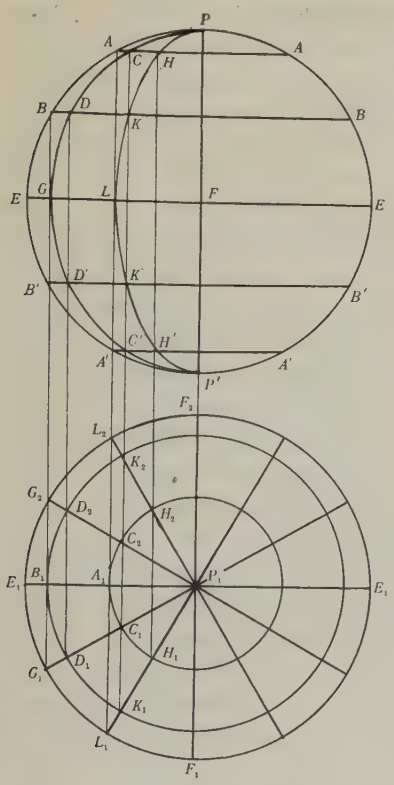


Fig. 1.

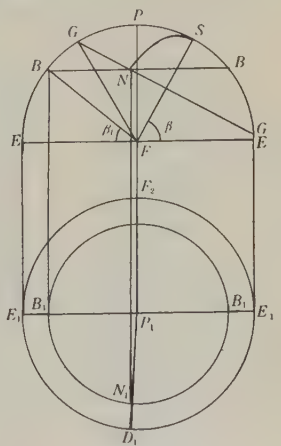


Fig. 2.

Uppgift 2. Att bestämma avståndet längs en storcirkel mellan Stockholm (latitud: $\beta = 59°,3$; longitud: $\lambda = 18°,0$) och New York ($\beta_1 = 40°,7$; $\lambda_1 = -74°,0$) (fig. 2).

I den övre figuren är EE ekvatorn, P polen och PSE meridianen genom Stockholm. Stockholms läge S och New Yorks breddcirkel BB konstrueras med användning av vinklarna β och β_1. Den undre projektionen begränsas

utåt av ekvatorns storcirkel; P_1 är polen och P_1E_1 Stockholms meridian. Avsättes $E_1P_1D_1 = \lambda - \lambda_1$, blir P_1D_1 New Yorks meridian. New Yorks breddcirkel $B_1N_1B_1$ erhålles, om man först drar BB_1. Skärningspunkten N_1 blir New Yorks projektion i detta plan. Drages N_1N, erhålles New Yorks läge i den övre projektionen. Nu sökes storcirkelbågen SN. Men lägges ett normalplan till FS genom N, erhålles en småcirkel GG, vars alla punkter ha samma avstånd till S. För att kunna beräkna SN eller SG har man således endast att mäta vinkeln SFG.

Uppgift 3. Att bestämma dagens längd, då man känner latituden β och solens deklination δ (fig. 3).

I den övre projektionen är EE jordens ekvator och P dess nordpol. Avsättes $EFS = \delta$ och drages $FD \perp FS$, så är FD gränslinjen mellan den belysta och den obelysta delen av jordytan. Avsättes $EFB = \beta$, blir BB ortens breddcirkel, som skär skuggans gränslinje i C. Den undre projektionen begränsas av ekvatorscirkeln $E_1F_1E_1F_2$; P_1 är polen. Projicieras breddcirkeln BB med punkten C ned i den undre figuren, erhålles cirkeln $B_1C_1B_1C_2$ med punkterna C_1 och C_2. Här är (den vänstra) bågen $C_1B_1C_2$ den sökta dagbågen. Uppmätes vinkeln v, kan dagens längd lätt beräknas.

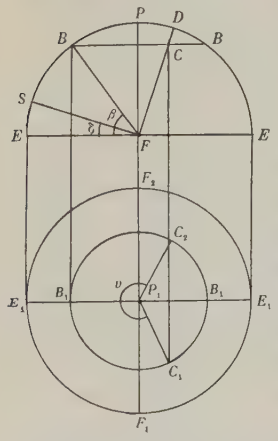


Fig. 3.

Specialfall: Bestäm längsta dagens längd för en ort med känd latitud. I detta fall motsvarar D en punkt på norra polcirkeln ($\delta = 23°,5$).

I de följande astronomiska uppgifterna antages alltid ortens polhöjd given. En stjärnas läge kan angivas genom dess höjd h och azimut a eller genom dess deklination δ och timvinkel τ. Äro två vilka som helst av dessa fyra koordinater givna, kunna de båda andra bestämmas. Men av fyra tal kunna två utväljas på sex olika sätt. Härav uppstå sex olika problem, vilka jag nu går att behandla. I samt-

liga uppgifter användas tre projektioner av himlavalvet (fig. 4—6): 1) en projektion på meridianplanet: *NPZS* är meridianen, *NS* horisonten, *CE* ekvatorn, *P* polen och *Z* zenit; 2) en projektion på horisontalplanet med horisontcirkeln $N_1A_1S_1$, meridianen N_1S_1 och zenit Z_1; 3) en projektion på himmelsekvatorns plan med ekvatorscirkeln, meridianen E_2E_2 och polen P_2.

Uppgift 4. Givna äro h och a. Bestäm δ och τ (fig. 4).

Avsätt $S_1Z_1A_1 = a$ och $NCH = h$. Stjärnan ligger på parallellcirkeln HH. Dennas projektion $H_1R_1H_1$ i horisontalplanet erhålles genom linjen HH_1. Skärningspunkten R_1 blir nu stjärnans projektion i detta plan. Drages R_1R, blir R stjärnans projektion i meridianplanet. Nu lägges en parallellcirkel DD till ekvatorn genom R; då är ECD stjärnans deklination. För att finna timvinkeln bestämmer man R:s projektion på ekvatorsplanet. Först erhålles cirkeln DD:s projektion $D_2R_2D_2$ medelst linjen DD_2, varefter man drar linjen RR_2. Då är R_2 den sökta projektionen och vinkeln $E_2P_2B_2$ den sökta timvinkeln.

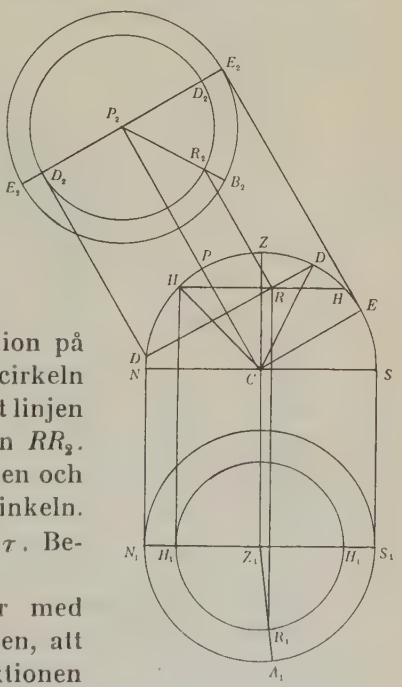


Fig. 4.

Uppgift 5. Givna äro δ och τ. Bestäm h och a (fig. 4).

Lösningen överensstämmer med föregående med den skillnaden, att man börjar i ekvatorsprojektionen och slutar i horisontalprojektionen. Man får i ordning linjerna P_2B_2, CD, DD, cirkeln $D_2R_2D_2$, punkten R_2, linjen R_2R och punkten R; vidare HH, HC och höjden h samt HH_1, cirkeln $H_1R_1H_1$, RR_1, Z_1A_1 och vinkeln a.

Uppgift 6. Givna äro h och δ. Bestäm a och τ (fig. 4).

Man avsätter $NCH = h$ och $ECD = \delta$, drager HH och DD och finner punkten R. Sedan drages dels HH_1, cirkeln $H_1R_1H_1$, linjerna RR_1 och Z_1A_1, dels DD_2, cirkeln $D_2R_2D_2$, linjerna RR_2 och P_2B_2.

Uppgift 7. Givna äro a och δ. Bestäm h och τ (fig. 5).

Avsätt $S_1Z_1A_1 = a$ och $ECD = \delta$ samt drag A_1A och DD. Eftersom stjärnan ligger på både cirkeln DD och vertikalcirkeln ZA (för åskådlighetens skull är vertikalcirkelns projektion ZA angiven i figuren, men denna *tänkta* ellipsbåge får ej användas vid konstruktionen), måste den ligga på skärningslinjen mellan dessa cirklars plan. Vertikalcirkelns plan utdrages, så att en kvadrat bildas; dess projektion i meridianplanet är $ZCAG$. Utritas nu denna kvadrat vid sidan av meridianprojektionen, erhålles figuren $Z_3C_3A_3G_3$ (obs! C och C_3 är klotets medelpunkt). Dragas KK_3 och LL_3, är det tydligt, att punkterna K_3 och L_3 ligga både i cirkeln DD:s och i cirkeln ZA:s plan. Linjen K_3L_3 är således skärningslinjen mellan planen, och KL är dess projektion i meridianplanet. Drages således R_3R, blir R stjärnans projektion i meridianplanet. Punkten H ger nu stjärnans höjd och liksom i uppgift 4 kan man sedan konstruera timvinkeln (denna konstruktion är ej utför i figuren).

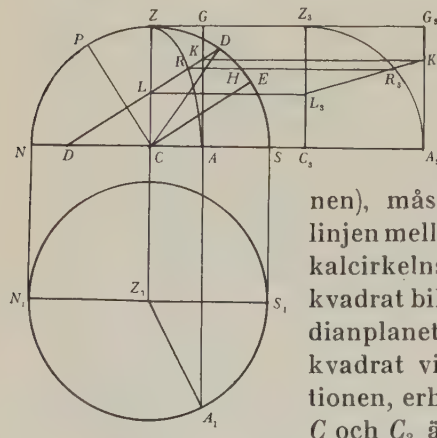


Fig. 5.

Uppgift 8. Givna äro h och τ. Bestäm δ och a.

Lösningen blir analog med föregående, på det sätt att ekvatorsplanet och horisontalplanet byta roller.

Uppgift 9. Givna äro a och τ. Bestäm h och δ (fig. 6).

Med användning av a konstrueras först projektionen A i meridianplanet av skärningspunkten mellan stjärnans vertikalcirkel och horisonten och med användning av τ erhålles projektionen B i meridianplanet av skärnings-

punkten mellan stjärnans deklinationscirkel och ekvatorn. Stjärnan ligger nu i den punkt, där klotytan träffas av skärningslinjen mellan vertikalcirkelns plan Q_1 och deklinationscirkelns plan Q_2. Dessa plan utdragas, så att en rektangel och en kvadrat bildas, vilkas projektioner i meridianplanet äro *CYGA* och *CPTB*. Skärningslinjen mellan planen erhålles, om man jämte klotets medelpunkt *C* kan

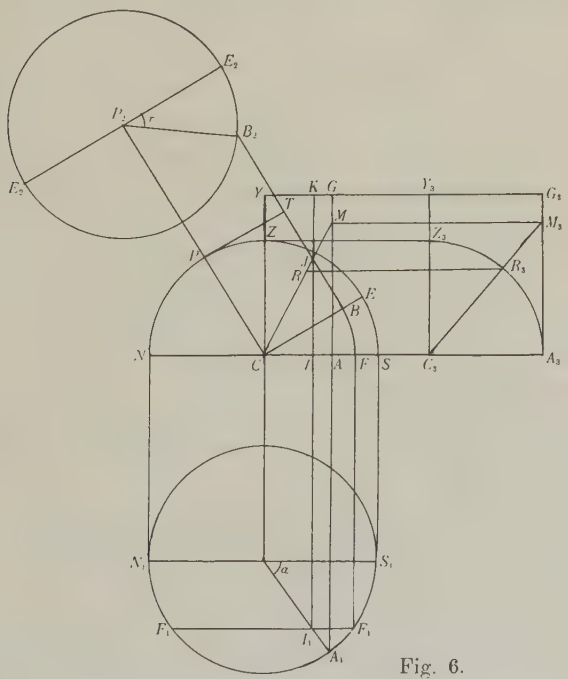


Fig. 6.

finna ännu en gemensam punkt för de båda planen. Fördenskull lägges ett tredje plan Q genom B parallellt med meridianplanet. [Söker man skärningslinjerna L_1 och L_2 mellan detta plan Q och planen Q_1 och Q_2, blir dessa linjers skärningspunkt en gemensam punkt för planen Q_1 och Q_2.] Skärningen mellan planet Q och klotet blir en småcirkel; av dess projektion i meridianplanet är endast bågen BF utritad; dess projektion i horisontalplanet blir linjen F_1F_1.

Skärningslinjen L_1 mellan planen Q och Q_1 projicieras således till punkten I_1 i horisontalplanet och till linjen IK i meridianplanet. Skärningslinjen L_2 mellan planen Q och Q_2 har i meridianplanet projektionen BT. Skärningspunkten mellan linjerna L_1 och L_2 får således i meridianplanet projektionen J. Men denna skärningspunkt ligger som nämnt i båda planen Q_1 och Q_2, och projektionen av skärningslinjen L mellan dessa plan blir således linjen CJ, som förlängd träffar linjen AG i M. För att finna linjen L:s skärningspunkt med klotytan fortsätter man som i uppgift 7. Vertikalcirkelns plan Q_1 utritas vid sidan av meridianprojektionen, varvid figuren $C_3Y_3G_3A_3$ erhålles. Sedan dragas MM_3, C_3M_3 och R_3R. Tydligen är C_3M_3 linjen L, och R_3 är stjärnans läge och R stjärnans projektion i meridianplanet. Sedan konstrueras lätt stjärnans höjd och deklination (ej utfört i figuren).

Men med de sista uppgifterna har jag redan överskridit gränsen för vad som kan förekomma i skolan. Jag har endast för fullständighetens skull medtagit dem. Jag övergår nu till en uppgift, där konstruktionen av plana skärningar kommer till användning.

Uppgift 10. Att konstruera solens skenbara rörelse på himlavalvet under ett dygn, om latituden β och solens deklination δ äro kända (fig. 7).

Det vertikala projektionsplanet tänkes ligga helt bakom det halvklot, som representerar himlavalvet, och vara parallellt med meridianplanet. Det horisontella projektionsplanet tänkes ligga ett stycke under himlavalvets horisontalplan. Gränsen mellan projektionsplanen är linjen L. Avsättes vinkeln $ECD = \delta$, blir DA solens bana. Solbanan utskäres av ett plan, som skär horisontalplanet längs linjen K. Denna linjes projektion i vertikalplanet är punkten O. Vrides det skärande planet åt vänster kring linjen K, tills det kommer ned i horisontalplanet, får man solbanan till vänster om K i dess verkliga form, som är en småcirkel. Dess medelpunkt är projicierad i B och B_1 i resp. vertikal- och horisontalplan. Medelpunktens avstånd till linjen K är $= OB$; man ritar därför bågen BB_2 och normalen B_2B_3.

Medelpunktens avstånd till L erhålles, om man drar $B_1B_3 \perp L$. Medelpunkten i småcirkeln blir således B_3. Radien blir $= BD$. [För övrigt finner man D_3 även genom att draga bågen DD_2 och normalen D_2D_3.] Solbanans skärningspunkter med horisonten finner man genom att draga bågen AA_2 och normalen A_2A_3. Solens läge vid olika timslag i banan $A_3'D_3A_3$ vid olika timslag erhåller man genom att dela hela cirkeln i 24 *lika* delar. För tydlighetens skull markeras läget endast

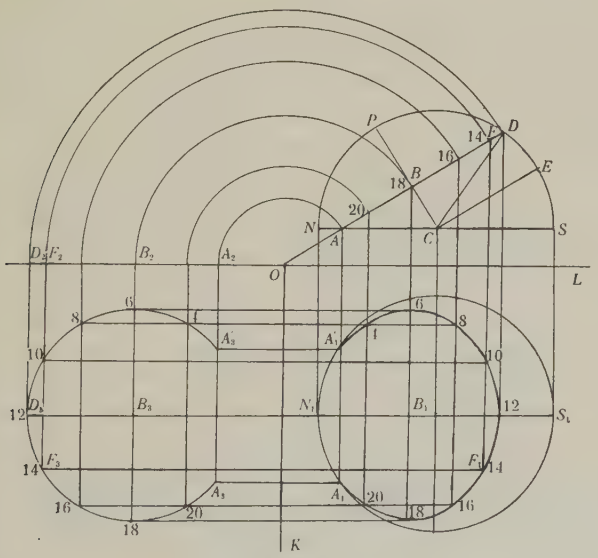


Fig. 7.

för varannan timme. Dessa punkter projicieras nu tillbaka i vertikalplanet och sedan i horisontalplanet. För att finna projektionen i vertikalplanet av t. ex. F_3 drar man normalen F_3F_2 och bågen F_2F. Sedan erhåller man F_1 i horisontalplanet genom att draga FF_1 och F_3F_1. I horisontalplanet erhålles på detta sätt en ellips, konstruerad punkt för punkt. Punkterna A_1' och A_1 äro solens upp- och nedgångspunkter; punkterna A' och A_3 ange upp- och nedgångstiderna. En annan sak att observera är, att solen ej befinner sig rakt i öster eller väster kl. 6 och kl. 18.

Kapacitet och självinduktion.

Av TORSTEN WETTERBLAD.

Efterföljande rader ha till syfte att fästa uppmärksamheten på tvenne enkla experiment för demonstration av kondensatorers egenskap att samla elektrisk laddning och induktionsspolars att alstra extraströmmar. Det indicerande instrumentet är i bägge fallen en glimljuslampa.

Det förstnämnda experimentet kräver tillgång till en variabel kapacitet. Det är lätt att av i handeln tillgängliga kondensatorer tillverka en sats, av vilken efter godtycke större eller mindre kapacitet kan uttagas. Fig. 1 visar en

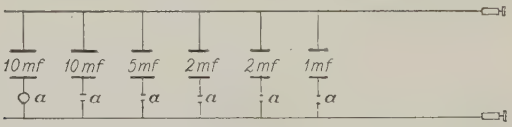


Fig. 1.

sats, som jag närmast för växelströmsförsök låtit förfärdiga, och av vilken genom insättning av proppar vid (*a*) kapaciteter mellan 1 och 30 mikrofarad kunna erhållas. För den demonstration, varom nu är fråga, låter man stadsspänningen (220 volts likström) över ett vätskemot-

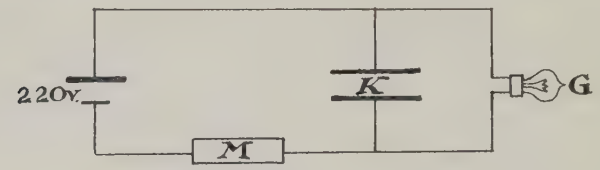


Fig. 2.

stånd *M* uppladda nyssnämnda kondensator *K* (se fig. 2), till vilken en 220 volts glimljuslampa *G* anslutits. Så snart

kondensatorn erhållit den för lampans tändning erforderliga spänningen, lyser denna upp för att åter slockna, då spänningen sjunkit till det för lampan karakteristiska minimalvärdet. Lampan kommer alltså att periodiskt lysa upp och slockna. Ju större den inkopplade kapaciteten är, desto större elektricitetsmängd måste tillföras, innan lampan tändes, och desto längre tid dröjer det mellan tändningarna. Det inses lätt, att tiden T mellan ett slocknande och den därpå följande tändningen måste under för övrigt konstanta försöksbetingelser (samma strömkälla, lampa och motstånd) vara proportionell mot kapaciteten ($T =$ konst. C.).[1] Nedanstående tabell visar tvenne försöksserier med två olika lampor

C i mf.	10 T i sek.	
	I	II
2	4,5	6,0
4	8,5	11,5
8	16,5	20,5
16	31,5	40,0

och olika motstånd. Tiden är i bägge fallen 10 T och är icke uppmätt med större noggrannhet än ungefär 1 sekund.

Som av tabellen framgår, gäller proportionaliteten approximativt. Något större mått av noggrannhet kan man av flera skäl icke vänta. Dels äro kondensatorerna icke ideella, dels är kapaciteten icke noggrant bestämd och slutligen varierar

[1] Matematiskt kan detta bevisas på följande sätt. Betecknas strömkällans E. M. K. med E, kondensatorns spänning med V, dess kapacitet med C, motståndet med R och den löpande tiden med t, fås differentialekvationen

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{E - V}{R}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Härav härledes lätt, om V_1 betyder lampans minimalspänning, V_2 dess tändspänning samt T tiden mellan ett slocknande och den därpå följande tändningen

$$T = C \cdot R \cdot \log \frac{E - V_1}{E - V_2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Vid ovannämnda konstanta försöksbetingelser övergår denna formel till

$$T = \text{konst. } C. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

under mätningarnas gång stadsspänningen något. Dessutom äro tänd- och minimalspänningarna ej absolut konstanta. Då det emellertid endast gäller att demonstrera kondensatorns verkningssätt, torde noggrannheten vara fullt tillräcklig. — Av formel (2) i noten framgår den inverkan, som motståndet har på tändningsfrekvensen. Ju större motståndet är, desto långsammare försiggår kondensatorns uppladdning. Att märka är till slut också, att variationsområdena för motstånd och kapacitet äro beroende av den använda lampans individuella egenskaper.[1]

För att demonstrera uppkomsten av extraströmmar användes mestadels en parallellt till en induktionsspole kopplad liten glödlampa, som lyser upp i de ögonblick, då strömmen slutes eller avbrytes. Stundom ersättes glödlampan med en visargalvanometer, vilket har den fördelen, att även extraströmmarnas riktning då låter sig påvisas. I sistnämnda fall krävas emellertid som bekant särskilda spärranordningar för galvanometervisaren, och det är dessutom icke lätt att finna en galvanometer, som reagerar tillräckligt hastigt. En glimljuslampa, använd i stället för galvanometern, demonstrerar tack vare sin polaritet och sin egenskap att tändas först vid en viss spänning, på ett eklatant sätt extraströmmarnas uppkomst och riktning. Fördelaktigt är naturligtvis att till sitt förfogande ha en spole med stor självinduktionskoefficient.[2]

Försöksanordningen framgår av fig. 3. Stadsspänningen

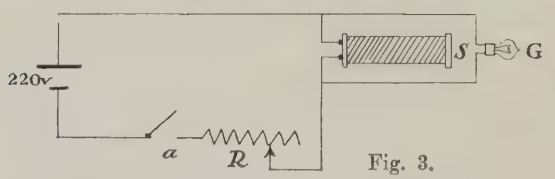


Fig. 3.

[1] Här beskrivna kapacitetsförsök har samma grundidé som det i en föregående uppsats av mig (»Några interferensförsök») beskrivna akustiska interferensförsöket.

[2] För växelströmsförsök har jag låtit tillverka en induktionsspole som visat sig synnerligen lämplig för ifrågavarande demonstration av extraströmmar. Spolen är lindad av 2 mm:s överspunnen koppartråd i 2 000 varv. Dess inre diameter är 5,5 cm, yttre 14 cm och längd 23 cm. Likströmsmotståndet 3 ohm.

(220 volt) är över en knivströmbrytare *a* och ett reglerbart motstånd *R* kopplad till spolen *S*, och parallellt till denna är en 220 volts glimljuslampa *G* ansluten. Lampans polaritet bör vara på förhand undersökt. Vid lämpligt, av lampans egenskaper och induktionskoefficientens storlek betingat förkopplingsmotstånd inträffar nu följande:

a) *Strömmen slutes.* Tack vare den inducerade elektromotoriska kraften antar strömstyrkan icke genast sitt definitiva värde. Spänningsförlusten i förkopplingsmotståndet är därför att börja med liten, och lampan erhåller för ett ögonblick den för tändning erforderliga spänningen. Glimljuset betäcker den ena elektroden, varav i enlighet med förut gjord prövning riktningen av den inducerade E. M. K. genast framgår.

b) *Strömmen brytes.* En E. M. K. induceras, större än tändspänningen. Lampan lyser upp ett ögonblick, och glimljuset betäcker nu den andra elektroden. — Man bör ej underlåta att visa, att omnämnda effekter utebliva (ev. minskas), om järnkärnan borttages.

Av vikt är, att strömmen slutes och brytes hastigt. Svårast är att erhålla ljusglimten vid strömslutning. Man bör därför prova ut, vilken av lampans poler som lättast ger denna effekt. Naturligtvis bör den använda lampan ha en sådan konstruktion, att glimljusets placering på de olika elektroderna är tydligt skönjbar.

För de bägge försöken kunna naturligtvis även 110-voltslampor och däremot svarande spänning användas.

Spegel- och linsformlernas härledning.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Ovanstående fråga har i denna tidskrift behandlats av förf. (årg. 1, sid. 173—174 och årg. 2, sid. 47), läroverksadj. Blom (årg. 1, sid. 230—234) samt professor Charlier (årg. 9, sid. 135—143). Då jag nu åter tar till orda i samma sak, beror det på att jag funnit härledningen tarva ytterligare förenkling.

Prof. C. sätter fingret på den ömma punkten i den sedvanliga metoden, då han påpekar dess »betungande minnesregler rörande *tecknen* för radierna och avstånden för bild och föremål från linsen (spegeln)». Ett slående skolexempel på riktigheten av detta omdöme fick jag vid senaste vårtermins (1927) studentskrivning i fysik, då det visade sig, att de nämnda reglerna kommo i ödesdiger konflikt med vanligt, sunt pojkförstånd; nästan alla mina skribenter, som behandlade det optiska problemet, uppfattade en given sfärisk ytas radie konsekvent såsom en positiv storhet, medan teckenreglerna fordrade, att samma radie skulle uppfattas som en ömsom positiv och ömsom negativ storhet. Efter den betan har jag obetingat satt underbetyg — inte åt pojkarna utan åt den teckenregel, som givit prov på en så betänklig frändskap med »Falstaff Fakirs» bekanta distinktion: »Buffeln är ett hornigt djur — ömsom ko och ömsom tjur».

Prof. C. kräver, att i lins- och spegelformlerna radier alltid betraktas som positiva kvantiteter men övriga av stånd som koordinater, varvid det infallande ljusets riktning anger koordinataxelns (=optiska axelns) positiva riktning. Härav följer emellertid, att dessa formler avvika från

sitt traditionella utseende och därför sannolikt verka avskräckande på många. Vidare finge man, för den händelse att en lysande punkt befinner sig (på optiska axeln) *mellan* två centrerade linser, den ena linsens positiva axelriktning rakt motsatt den andras, en olägenhet som helst bör undvikas.

Jag tager steget fullt ut och föreskriver, att *alla* formelbokstäver, som beteckna *avstånd*, skola vara positiva storheter. Olika tecken inläggas endast i bokstäver, som beteckna *vinklar*.[1] Därvid gäller den vanliga enkla regeln, att en positiv vinkel motsvarar en vridning *mot*, en negativ *med* visaren på ett ur. Det fasta vinkelbenet tänkes sammanfalla antingen med optiska axeln eller med en radie. För övrigt är metoden densamma som i mina ovan citerade artiklar, d. v. s. då uteslutande centrala strålar betraktas, äro ifrågakommande vinklar så små, att sinus, tangens och radiantalet för en godtycklig dylik vinkel kunna utbytas mot varandra.

Vidare finner jag det synnerligen lämpligt att med adj. B. benämna det infallande strålknippet *objektknippet*, det reflekterade eller brutna *bildknippet*, samt stryker under hans framhållande av att det är dessa knippens *art*beskaffenhet och icke *graden* av deras divergens eller konvergens, som har teckenverkan i slutformeln.

Spegelformeln.

A. Konkav spegel.

Tre fall äro möjliga: 1:o) objektknippet divergent och bildknippet konvergent, 2:o) objektknippet divergent och bildknippet divergent, 3:o) objektknippet konvergent och bildknippet konvergent. Vi behandla dem i ordning, varvid i_1 = infallsvinkel, i_2 = reflexionsvinkel, r = spegelns radie, a_1 = föremålets och a_2 = bildens avstånd från spegelns mittpunkt samt övriga bokstävers betydelse framgår av figurerna.

[1] Denna tankegång i spegel- och linsteorin torde vara ny. Atminstone har förf. ej mött den i facklitteraturen.

1:o) i_1, α_1, α_2, $\delta > 0$; $i_2 < 0$.

Reflexionslagen $i_1 = -i_2$ ger omedelbart ur fig. 1 $\alpha_1 - \delta = \delta - \alpha_2$, d. v. s.

(1) . . . . . $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\delta$

eller, då man observerar, att h kan betraktas som en mot optiska axeln vinkelrät linje, $\frac{h}{a_1} + \frac{h}{a_2} = 2\frac{h}{r}$, d. v. s.

(2) . . . . . $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}$,

där f=brännvidden. Ekv. (1) säger oss, att δ är aritmetiskt medium till α_1 och α_2, och ekv. (2), att r är harmoniskt medium till a_1 och a_2.

Anm. Man kan låta föremål och bild byta plats i fig. 1, utan att (1) eller (2) undergår någon förändring.

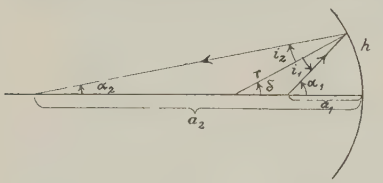


Fig. 1.

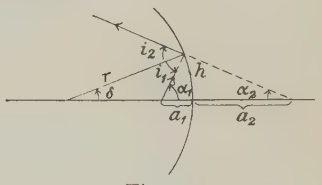


Fig. 2.

2:o) i_1, α_1, $\delta > 0$; i_2, $\alpha_2 < 0$.

Reflexionslagen $i_1 = -i_2$ ger ur fig. 2 $\alpha_1 - \delta = -\alpha_2 + \delta$, d. v. s. ekv. (1). Men nu är $\alpha_2 = -\frac{h}{a_2}$, vadan (2) ersättes med

(2_1) . . . . . $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{r}$.

3:o) i_2, α_2, $\delta > 0$; i_1, $\alpha_1 < 0$.

Reflexionslagen $-i_1 = i_2$ ger ur fig. 3 $-\alpha_1 + \delta = \alpha_2 - \delta$, d. v. s. ekv. (1). Men nu är $\alpha_1 = -\frac{h}{a_1}$, vadan (2) ersättes med

(2_2) . . . . $-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{r}$.

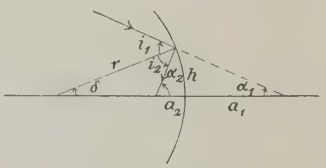


Fig. 3.

B. Konvex spegel.

Tre fall äro möjliga: 1:o) objektknippet divergent och bildknippet divergent, 2:o) objektknippet konvergent och bildknippet divergent, 3:o) objektknippet konvergent och bildknippet konvergent. Vi behandla dem i ordning och använda samma bokstavsbeteckningar som nyss.

1:o) $i_1,\ \alpha_1 > 0;\ i_2,\ \alpha_2,\ \delta < 0$.

Reflexionslagen $i_1 = -i_2$ ger ur fig. 4 $-\delta+\alpha_1 = -\alpha_2-(-\delta) = -\alpha_2+\delta$, d. v. s. ekv. (1). Men nu är $\alpha_2 = -\frac{h}{a_2}$ och $\delta = -\frac{h}{r}$, vadan (2) ersättes med

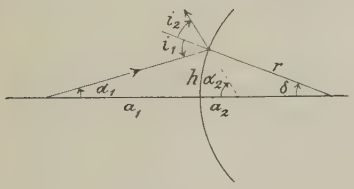


Fig. 4.

$$(2_3)\ \ \frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2} = -\frac{2}{r} = -\frac{1}{f},$$

där f = brännvidden.

Anm. Som ekv. (2_3) genom teckenändring kan transformeras till (2_2), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 3:o).

2:o) $i_1 > 0;\ i_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \delta < 0$.

Reflexionslagen $i_1 = -i_2$ ger ur fig. 5 $-\delta-(-\alpha_1) = -\alpha_2-(-\delta)$, d. v. s. ekv. (1). Men nu är $\alpha_1 = -\frac{h}{a_1}$, $\alpha_2 = -\frac{h}{a_2}$ och $\delta = -\frac{h}{r}$, vadan (2) ersättas med

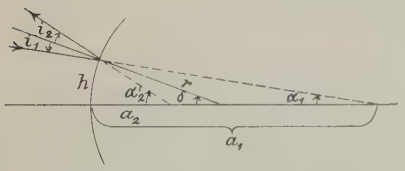


Fig. 5.

$$(2_4)\ \ -\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2} = -\frac{2}{r}.$$

Anm. 1. Man kan låta föremål och bild byta plats i fig. 5, utan att (1) eller (2_4) undergår någon förändring.

Anm. 2. Som ekv. (2_4) genom teckenändring kan transformeras till (2), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 1:o).

3:o) $i_2,\ \alpha_2 > 0$; $i_1,\ \alpha_1,\ \delta < 0$.

Reflexionslagen $-i_1 = i_2$ ger ur fig. 6 $-\alpha_1 - (-\delta) = \alpha_2 + (-\delta)$, d. v. s. ekv. (1). Men nu är $\alpha_1 = -\frac{h}{a_1}$ och $\delta = -\frac{h}{r}$, vadan (2) ersättes med

$$(2_5) \ldots -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = -\frac{2}{r}.$$

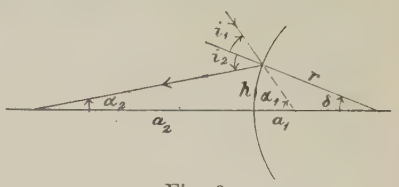


Fig. 6.

Anm. Som ekv. (2_5) genom teckenändring kan transformeras till (2_1), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 2:o).

Sammanfattning. Vid sfäriska speglar gäller oföränderligt samma enkla utgångsformel (1). Genom att draga en infallande stråle och dess reflekterade[1] finner man genast, vilka i (1) ingående vinklar som äro positiva eller negativa, och således även, vilka tecken man skall sätta framför de alltid positiva storheterna a_1, a_2 och r (eller f) i slutformeln.

Anm. Då lärjungen på detta sätt tvingas att rita en figur och ej slipper undan med att rent matematiskt behandla en inlärd formel, har man också i sin hand den enda möjligheten att ur skrivprovet avgöra, huruvida han fullt förstått det optiska problemets fysikaliska innebörd eller icke.

Linsformeln.

I. Ljusets brytning i en sfärisk gränsyta.

A. Gränsytan konvex mot det infallande ljuset.

Fyra fall äro möjliga: 1:o) objektknippet divergent och bildknippet konvergent, 2:o) objektknippet divergent och bildknippet divergent, 3:o) objektknippet konvergent och bildknippet konvergent, 4:o) objektknippet konvergent och bildknippet divergent. Vi behandla dem i ordning, varvid

[1] Härvid kan man antingen gå tillväga i enlighet med fig. 1—6 eller på vanligt sätt avbilda ett föremål med utsträckning och sedan från (mot) föremålets fotpunkt draga en snett infallande stråle, som reflekteras i riktning mot eller från bildens fotpunkt.

i_1=infallsvinkel, i_2=brytningsvinkel, n_1 och n_2=resp. mediers brytningsindex i förhållande till luft, r=den sfäriska ytans radie, a_1=föremålets och a_2=bildens avstånd från skärningspunkten mellan den optiska axeln och sfäriska ytan samt övriga bokstävers betydelse framgår av figurerna.

1:o) i_1, i_2, $\alpha_1 > 0$; α_2, $\delta < 0$.

Brytningslagen $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$ övergår för centrala strålar till $n_1 i_1 = n_2 i_2$, som omedelbart ur fig. 7 ger $n_1(\alpha_1 - \delta) = n_2(-\delta + \alpha_2)$ eller

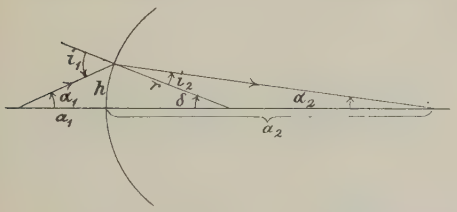


Fig. 7.

(3) . . . . $n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = (n_1 - n_2)\delta$.

Men här är $\alpha_2 = -\frac{h}{a_2}$ och $\delta = -\frac{h}{r}$, vadan av (3) erhålles

(4) . . . . . $\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}$.

2:o) i_1, i_2, α_1, $\alpha_2 > 0$; $\delta < 0$.

Brytningslagen $n_1 i_1 = n_2 i_2$ ger ur fig. 8 $n_1(\alpha_1 - \delta) = n_2(\alpha_2 - \delta)$, d. v. s. ekv. (3).

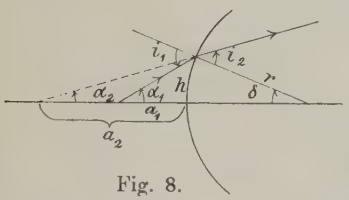


Fig. 8.

Men $\delta = -\frac{h}{r}$, vadan (4) ersättes med

(4_1) . . $\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}$.

3:o) i_1, $i_2 > 0$; α_1, α_2, $\delta < 0$.

Brytningslagen $n_1 i_1 = n_2 i_2$ ger ur fig. 9 $n_1(-\delta + \alpha_1) = n_2(-\delta + \alpha_2)$, d. v. s. ekv. (3), som på grund av att α_1, α_2 och δ äro negativa övergår till

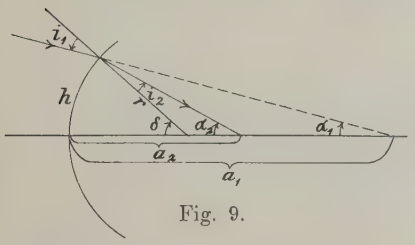


Fig. 9.

(4_2) . $-\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}$.

4:o) i_1, i_2, $\alpha_2 > 0$; α_1, $\delta < 0$.

Brytningslagen $n_1 i_1 = n\, i_2$ ger ur fig. 10 $n_1(-\delta + \alpha_1) = n_2(\alpha_2 - \delta)$, d. v. s. ekv. (3), som på grund av att α_1 och δ äro negativa övergår till

$$(4_3) \quad -\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

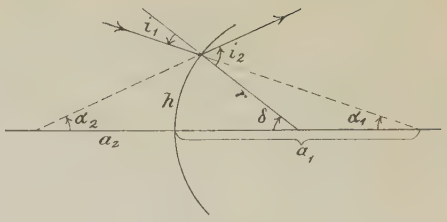


Fig. 10.

B. Gränsytan konkav mot det infallande ljuset.

Fyra fall äro möjliga: 1:o) objektknippet divergent och bildknippet konvergent, 2:o) objektknippet divergent och bildknippet divergent, 3:o) objektknippet konvergent och bildknippet konvergent, 4:o) objektknippet konvergent och bildknippet divergent. Vi behandla dem i ordning och använda samma bokstavsbeteckningar som nyss.

1:o) α_1, $\delta > 0$; i_1, i_2, $\alpha_2 < 0$.

Brytningslagen $-n_1 i_1 = -n_2 i_2$ ger ur fig. 11 $n_1(\delta - \alpha_1) = n_2(\delta - \alpha_2)$, d. v. s. ekv. (3), som, då α_2 är negativ, övergår till

$$(4_4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Anm. Som ekv. (4_4) genom teckenändring kan transformeras till (4_3), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 4:o).

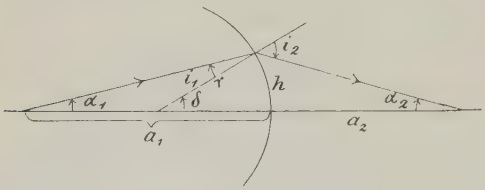


Fig. 11.

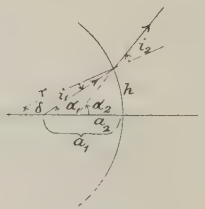


Fig. 12.

2:o) i_1, i_2, α_1, α_2, $\delta > 0$.

Brytningslagen $n_1 i_1 = n_2 i_2$ ger ur fig. 12 $n_1(\alpha_1 - \delta) = n_2(\alpha_2 - \delta)$, d. v. s. ekv. (3), som här genast övergår till

$$(4_5) \quad \ldots\ldots \quad \frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Anm. Som ekv. (4_5) genom teckenändring kan transformeras till (4_2), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 3:o).

3:o) $\delta > 0$; i_1, i_2, α_1, $\alpha_2 < 0$.

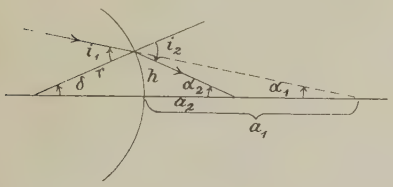


Fig. 13.

Brytningslagen $-n_1 i_1 = -n\, i_2$ ger ur fig. 13 $n_1(\delta - \alpha_1) = n_2(\delta - \alpha_2)$, d. v. s. ekv. (3), som på grund av att α_1 och α_2 äro negativa övergår till

$$(4_6) \quad \ldots \quad -\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Anm. Som ekv. (4_6) genom teckenändring kan transformeras till (4_1), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 2:o).

4:o) α_2, $\delta > 0$; i_1, i_2, $\alpha_1 < 0$.

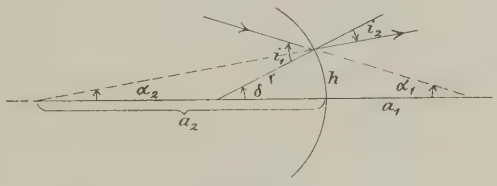


Fig. 14.

Brytningslagen $-n_1 i_1 = -n_2 i_2$ ger ur fig. 14 $n_1(\delta - \alpha_1) = n_2(\delta - \alpha_2)$, d. v. s. ekv. (3), som, då α_1 är negativ, övergår till

$$(4_7) \quad \ldots \quad -\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Anm. Som ekv. (4_7) genom teckenändring kan transformeras till (4), är detta fall att betrakta som omvändning av fallet A 1:o).

Sammanfattning. För alla fall av brytning i en sfärisk gränsyta gäller samma utgångsekvation (3), som genom sin symmetriska form är lätt att minnas men för övrigt knappast behöver läggas på minnet, då den nästan direkt framgår ur en enkel teckning av strålgången genom ytan. Samtidigt

säger oss denna teckning omedelbart, vilka av de i (3) ingående vinklar som äro positiva eller negativa, och därmed även det definitiva sambandet mellan de positiva storheterna a_1, a_2 och r i slutformeln.

Anm. Påpekas må, att (3) övergår till (1) genom att sätta $n_2 = -n_1$. Således kunna samtliga i det föregående behandlade reflexionsproblem betraktas som gränsfall av motsvarande brytningsproblem.

II. Ljusets brytning i två successiva sfäriska gränsytor.

De båda sfäriska ytorna med radierna r_1 och r_2 antagas hava gemensam optisk axel samt av denna avskära stycket d. Vidare antas ljuset röra sig i medier med resp. brytningsexponenter n_1, n_2 och n_3. Mot r_1 och r_2 svara vinkelbeteckningarna δ_1 och δ_2, mot n_1, n_2 och n_3 vinkelbeteckningarna α_1, α_2, α_3 och avståndsbeteckningarna a_1, a_2, a_3, vilka samtliga bokstävers betydelse torde framgå av det föregående.

Tillämpas ekv. (3) på brytningen i vardera gränsytan, erhålles ekvationssystemet

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = (n_1 - n_2)\delta_1 \\ n_2\alpha_2 - n_3\alpha_3 = (n_2 - n_3)\delta_2 \end{cases}$$

som genom addering av dess båda ekvationer ger

$$(6) \quad \ldots \quad n_1\alpha_1 - n_3\alpha_3 = (n_1 - n_2)\delta_1 + (n_2 - n_3)\delta_2.$$

Problemets generella lösning innehålles i (5), och för varje speciellt fall införas med hjälp av en figur alla mot ovanstående vinklar svarande sträckor, vilkas samband därmed är funnet. Som exempel må tagas en bikonvex tjock lins (fig. 15).

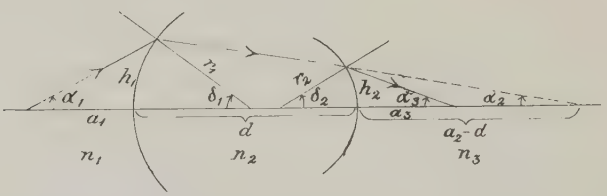


Fig. 15.

Enligt fig. 15 äro α_1 och $\delta_2 > 0$; α_2, α_3 och $\delta_1 < 0$. Således övergår (5) till

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n_1}{a_1} + \dfrac{n_2}{a_2} = \dfrac{n_2 - n_1}{r_1} \\ -\dfrac{n_2}{a_2 - d} + \dfrac{n_3}{a_3} = \dfrac{n_2 - n_3}{r_2} \end{array} \right.$$

som efter elimination av a_2 ger det önskade sambandet mellan övriga storheter.

Som specialfall av (7) kan sedan den vanliga formeln för en tunn lins erhållas. Härvidlag är det emellertid enklare att utgå från (6), och då den luftomgivna tunna linsen är viktigast för skolstadiet, skall jag nu visa, hur lätt formeln för de olika linstyperna framgår ur (6).

Förutsättning: $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n > 1$, $a_1 = a$, $a_3 = b$, $d = 0$ och således även $h_1 = h_2$ (jfr fig. 15). Ekv. (6) förenklas till

$$(6_1) \quad \alpha_1 - \alpha_3 = (n-1)(\delta_2 - \delta_1).$$

1:o) Bikonvex lins.

Fig. 16 ger α_1, $\delta_2 > 0$; α_3, $\delta_1 < 0$.

(6_1) övergår till

$$(8) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f},$$

där f = brännvidden.

Anm. Genom att i (8) sätta r_1 eller $r_2 = \infty$ framkommer formeln för den plankonvexa linsen.

Fig. 16.

Fig. 17.

2:o) Konkavkonvex lins.

Fig. 17 ger $\alpha_1 > 0$; α_3, δ_1, $\delta_2 < 0$.

(6_1) övergår till

$$(8_1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}; \; r_1 < r_2.$$

3.o) Bikonkav lins.

Fig. 18 ger α_1, α_3, $\delta_1 > 0$; $\delta_2 < 0$.

(6_1) övergår till

$$(8_2) \quad \ldots \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{1}{f},$$

där f=brännvidden.

Anm. Genom att i (8_2) sätta r_1 eller $r_2 = \infty$ framkommer formeln för den plankonkava linsen.

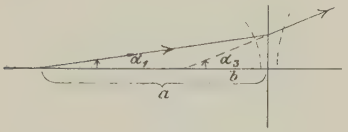


Fig. 18.

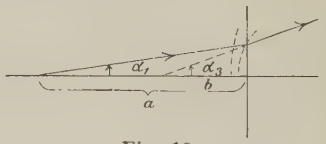


Fig. 19.

4:o) Konvexkonkav lins.

Fig. 19 ger α_1, $\alpha_3 > 0$; δ_1, $\delta_2 < 0$.

(6_1) övergår till

$$(8_3) \quad \ldots \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -(n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{f},$$

där $r_1 > r_2$.

I fig. 16—19 har för enkelhetens skull antagits, att objektknippet är divergent. Detta är naturligtvis ej nödvändigt. Antag t. ex., att det är fråga om en bikonkav lins, där både objekt- och bildknippet äro konvergenta. Man får då fig. 20, som ger

$$\delta_1 > 0; \ \alpha_1, \ \alpha_3, \ \delta_2 < 0.$$

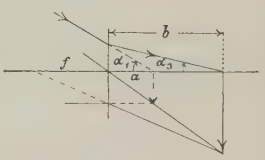


Fig. 20.

I stället för till (8_2) övergår nu (6_1) till

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{1}{f}.$$

Sammanfattning. För en tjock lins gäller utgångsformeln (5), som helt enkelt är en tillämpning av (3) på vardera linsytan, och för en tunn lins formeln (6), som erhålles genom att addera de båda i (5) ingående ekvationerna.

Sedan återstår blott att med hjälp av en figur i stället för vinklar införa motsvarande sträckor, varvid iakttages, att såväl objekt- och bildavstånd som radier och brännvidder alltid skola vara positiva. Framgår ur räkningen ett motsatt resultat, visar detta, att ifrågavarande fall icke giver någon lösning.

Anm. Då alltså ingen åtskillnad göres mellan »positiv» och »negativ» brännvidd, böra också termerna »positiv» och »negativ» lins försvinna och ersättas med »konvex» och »konkav» lins eller »samlingslins» och »spridningslins». Detta krav står i full överensstämmelse med språkbruket, då det gäller speglar; man använder ju icke termerna »positiv» och »negativ» spegel utan allenast »konkav» och »konvex» spegel.

För att visa, hur problembehandlingen gestaltar sig, då man tillämpar här utvecklade principer, kommer jag att i en följande uppsats genomräkna några representativa studentproblem.

Bestämning av en vätskas brytningsexponent.

Av B. BERGGREN.

Till försöket, som väl lämpar sig som elevlaboration, användes ett vätskeprisma med liten brytande vinkel, A. Minimideviationen d bestämmes. Brytningsexponenten n fås då ur den kända formeln

$$n = \frac{\sin \frac{A + d}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

För små vinklar A och d övergår denna likhet till

$$n - 1 = \frac{d}{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Deviationen bestämmes med den anordning, som fig. 1 visar. L är en mätlinjal, P prismat och A dess brytande

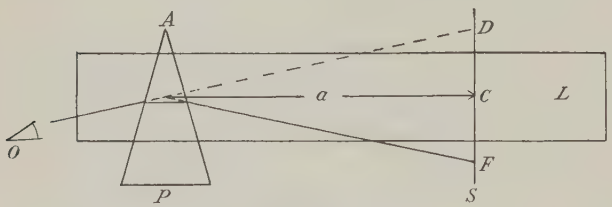


Fig. 1.

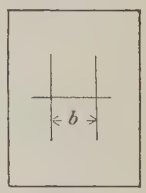


Fig. 2.

kant. S är en skärm, som kan förskjutas utmed måttstocken. En särskild släde härför kan lätt förfärdigas av eleverna, men kan undvaras. På skärmen finnas 3 fina linjer (fig. 2), av vilka två äro parallella och vertikala (avstånd b 1 à 2 cm), den tredje horisontell och i jämnhöjd med prismats överkant. Utefter denna tredje linje skall avståndet b mätas, detta för att undvika fel i hän-

delse av bristande parallellism mellan de båda vertikala linjerna. Skärmen göres lämpligen av en exponerad och framkallad fotografisk plåt, vars hinna ritsas med en gilletteklinga. Ett öga vid O ser över prismat den ena av skärmens parallella linjer och samtidigt genom prismat bilden av den andra av dessa linjer. Förskjutes nu skärmen så, att dessa båda linjer synas sammanfalla, kan deviationen bestämmas trigonometriskt ur linjeavståndet b och avståndet a mellan skärm och prisma. Är A känd, fås n ur ekv. (1) eller (2).

Som emellertid A svårligen låter sig bestämma direkt med enkla medel, får man i stället upprepa försöket med en vätska, vars brytningsexponent, n_1, är känd. Om deviation och skärmavstånd nu äro d_1, resp. a_1, fås

$$\frac{n-1}{n_1-1} = \frac{d}{d_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

eller, emedan $\frac{d}{d_1}$ kan utbytas mot $\frac{a_1}{a}$

$$\frac{n-1}{n_1-1} = \frac{a_1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Lämpliga vätskeprismor komma att föras i marknaden av P. A. Norstedt & Söner.

Följande resultat har erhållits vid försök med ett prisma, provisoriskt förfärdigat av vanligt glas (från en fotografiplåt).

Försöksvätska	a i mm					Medelv.
Vatten	540	543	537	552	537	542
Glycerin	392	393	398	398	396	395

Antages vattnets brytningsexp. vara 1,333, fås härav för glycerin $n - 1 = \frac{542}{395} \cdot 0{,}333 = 0{,}456$ eller $n = 1{,}46$; b var 8,5 mm, varav A kan beräknas till $2°{,}7$. Man bör ej underlåta att pröva, huruvida det tomma prismat åstadkommer någon märkbar deviation, vilket ej bör vara fallet, om prismat skall vara lämpligt för sitt ändamål.

Minimideviationen erhålles enklast genom att ställa prismats symmetriplan vinkelrätt mot skalans längdaxel. Ögonmått är här till fyllest. Naturligtvis är det dock lärorikt för eleverna att uppsöka minimideviationen optiskt.

Man frågar sig, hur stor approximation som införes, då formel (1) utbytes mot (2). Beräkningen härav kan lämpligen ske så, att man väljer värden på n och A och beräknar d ur (1), varefter motsvarande d- och A-värden insättas i (2) och n beräknas. Man får då för t. ex. $n = 1{,}5$ följande värden

A	4°	10°	20°	30°
n_{ber}	1,5004	1,5023	1,510	1,523
△	0,08	0,46	2,0	4,6

△ är procentiska felet hänfört till $n-1$. Ännu vid 20 graders brytande vinkel uppgår således felet blott till en enhet i andra decimalen.

Man kan även utveckla sinusfunktionerna i (1) i serie och medtaga de båda första termerna i utvecklingen, då man efter enkla räkningar approx. finner $\triangle = 100 \cdot \frac{A^2}{24} n(n+1)$, där A är uttryckt i radianer. För $n = 1{,}5$ finner man härur △-värden, som i det närmaste överensstämma med de i tabellen angivna.

Man finner sedan lätt procentiska felet vid användning av formel (3). Det utgör $100 \cdot \frac{A^2}{24}(n - n_1)(n + n_1 + 1)$.

På liknande sätt kan man genom att utveckla arctg-funktionen i serie undersöka proc. felet vid användning av formel (4). För n och $n_1 = 1{,}5$ (ungef.) finner man då approx. $\triangle = 100 \cdot \frac{A^2(n - n_1)}{4}$, varvid △ liksom förut hänför sig till $n - 1$.

Vid de flesta förekommande vätskor och med vatten som jämförelsevätska är $n - n_1 < 0{,}2$. För $A = \frac{1}{2}$ radian blir felet högst $1\frac{1}{4}$ %; två riktiga decimaler erhållas då med formel (4). För $A = 10° = \frac{1}{6}$ radian blir felet mindre än 0,5 %, även om $n - n_1$ skulle hava det högsta möjliga värdet 0,7.

Radioaktiviteten och jordens historia.

(Forts.)

(Referat av O. HAHN: Was lehrt uns die Radioaktivität über die Geschichte der Erde?)

Jordens värmehushållning. De pleokroitiska gårdarnas vittnesbörd om att jordskorpan under 500 mill. år haft ungefär samma temperatur som nu, visar orimligheten av Kelvins avkylningstid på ett särdeles markant sätt. Förklaringen till den bristande överensstämmelsen är den, att vi i de radioaktiva substanserna ha en ständig värmekälla, som i vidsträckt mån kompenserar förlusten genom utstrålning till världsrymden.

De radioaktiva grundämnena finnas nästan överallt på jorden. Känner man deras mängd, kan man ur deras bekanta energiutveckling beräkna det värme, som de tillföra jordskorpan. I tabell 5 anges genomsnittsvärdena av de viktigaste bergarternas radiumhalter och den därav genom multiplikation med 3×10^6 beräknade uranhalten pro g bergart.

Tabell 5.

Eruptivbergarter	*Ra*	*U*	Sedimentbergarter	*Ra*	*U*
	g	g		g	g
Sura (graniter)	$2{,}9 \times 10^{-12}$	$8{,}7 \times 10^{-6}$	Leror	$1{,}5 \times 10^{-12}$	$4{,}5 \times 10^{-6}$
Mellanformer (syenit, porfyr, trakyt)	$2{,}0 \times 10^{-12}$	6×10^{-6}	Sandstenar	$1{,}4 \times 10^{-12}$	$4{,}2 \times 10^{-6}$
Basiska (basalt, diabas, gabbro)	$1{,}0 \times 10^{-12}$	3×10^{-6}	Kalksten	$0{,}9 \times 10^{-12}$	$2{,}7 \times 10^{-6}$

Eruptivbergarternas höga radiumhalt beror troligtvis därpå, att vissa bergarter, som granit och kvartsporfyrer,

uppvisa särskilt höga värden; vidare kommer vid sedimentens bildning en del uran att stanna i havsvattnet.

Bergarternas toriumhalter visa en liknande gång, se tabell 6:

Tabell 6.

Eruptivbergarter	*Th*	Sedimentbergarter	*Th*
	g		g
Sura	29×10^{-6}	Leror	11×10^{-6}
Mellanformer	17×10^{-6}	Sandstenar	5×10^{-6}
Basiska	5×10^{-6}	Kalksten och dolomit	1×10^{-6}

Ur denna den fasta jordskorpans medelhalt av radioaktiva ämnen kan man lätt beräkna den värmemängd, som vid deras omvandling tillföres jorden, och jämföra detta värme med jordens värmeförlust. Antaga vi, att jorden i sin helhet har den för jordskorpan funna uranhalten, så är det utvecklade värmet 150 gånger större än det belopp, som är nödvändigt för att kompensera strålningsförlusten. Toriummängden, på samma sätt beräknad, skulle ge en värmemängd 130 gånger större än nödvändigt. I stället för att avsvalna skulle jorden under sådana förhållanden uppvärmas och det t. o. m. mycket hastigt; på 1 mill. år skulle temperaturen stiga 40°. Det är därför sannolikt, att de radioaktiva ämnena endast finnas i ett tunt lager av jordskorpan, ett lager, vars tjocklek icke behöver tagas större än 16 km för att hålla jorden i värmejämvikt.

Detta skikts tjocklek är beräknad under förutsättning av en konstant genomsnittlig radiumhalt, men en dylik är rätt osannolik i och för sig. Därtill kommer, att den temperatur, som ur en sådan diskontinuerlig fördelning av radioaktiviteten kan beräknas råda vid basen av detta skikt, är mycket lägre än den faktiska, och vidare, att de lavor, som vid vulkanutbrott från större djup komma till jordytan visa en viss om också ringa radioaktivitet. Koncentrationen av de radioaktiva grundämnena är därför troligtvis ej konstant, utan störst vid jordytan, avtagande inåt. Detta stämmer också med den iakttagelsen, att de

starkast aktiva sura bergarterna äro företrädda i de yttersta lagren och nedåt övergå i mindre sura, vilkas radioaktivitet är mindre.

Troligtvis avtager halten av radioaktiva ämnen exponentiellt; amerikanen JEFFREYS beräknar, att en minskning till hälften äger rum för varje 9 km:s sänkning. Man kan ur detta antagande beräkna temperaturer i jordskorpans djupare lager, som stå i samklang med vulkanismen, om man tar hänsyn till den värmeenergi, som genom ledning kommer från jordens inre.

Om man med INGERSOLL och ZOBEL antager, att $^3/_4$ av den vid jordytan bestämda geotermiska gradienten beror på de radioaktiva grundämnena, $^1/_4$ på värmeströmmen från det inre, finner man den tid, som åtgått för avkylning från en ursprunglig yttemperatur av 1 000° till den nu rådande, vara 1 600 mill. år. Men då jordytans temperatur för 1 600 mill. år sedan troligtvis icke var mycket skild från den nuvarande, måste man förlägga den tidpunkt, då yttemperaturen var 1 000°, mycket längre tillbaka, vilket betyder, att den radioaktiva energien måste tillskrivas en större andel i den geotermiska gradienten än $^3/_4$. I varje fall har man tydligen i de radioaktiva grundämnena en värmekälla, som mer än väl räcker till för att förklara den fasta jordskorpans höga ålder.

Av jordens värmetillstånd kan man efter detta göra sig följande bild. I atmosfären och den allra yttersta jordytan betingas temperaturen väsentligen av solstrålningen. Dennas räckvidd inåt jorden är ytterst obetydlig på grund av bergarternas ringa ledningsförmåga. Redan på 10 m djup råder en av solstrålningen oberoende, på 0°,1 konstant temperatur. Till värmejämvikten vid ytan bidrager en värmeström från det inre, vars storlek bestämmes av den experimentellt givna temperaturgradienten. Den geotermiska gradienten åstadkommes till avgjort största delen av det värme, som de radioaktiva ämnena i jordskorpans övre skikt producera. Från den heta kärnan av jorden kommer endast mycket litet värme; den har ännu i dag praktiskt taget

samma temperatur som omedelbart efter jordskorpans stelnande.

Under antagande av en maximal temperatur av 1 400° i jordens inre beräknar Jeffreys, att på ett djup av 700 km, alltså 6 000 km från jordens medelpunkt, avkylningen endast uppgår till 8—10°; 300 km under jordytan skulle råda en temperatur av 1 100—1 200°. Närmare jordytan skulle temperaturen vara ännu mycket lägre, om ej de radioaktiva processerna vore, och det är mycket tvivelaktigt, om vi utan radioaktiva ämnen skulle få bevittna någon vulkanisk verksamhet vid jordytan. Då nu vulkanismen är nödvändig för jordens organiska liv, som utan de kolsyrekällor vulkanerna utgöra för länge sedan skulle hava utslocknat, så följer, att radium betingar vulkanismen, denna i sin tur livet. Alltså: utan radium intet liv på jorden.

Jordskorpans rytmiska förändringar. Allt talar för, att jordytan under de geologiska perioderna har varit utsatt för starka horisontella och vertikala förskjutningar. Under vissa tider hava oceanerna översvämmat stora områden av kontinenterna, under andra hava de sedimentära havsavlagringarna upprests till väldiga bergskedjor. Jordytans historia avspelar sig enligt Joly i kretsprocesser, »revolutioner», vilka väsentligen betingas av radioaktiva orsaker.

Förloppet av en sådan revolution är enligt Joly följande:

1. Störningar innanför jordytan, som medföra tillfälliga översvämningar.

2. Starkare, permanenta översvämningar av stora fastlandsområden med bildning av nya sediment.

3. Fastlandets upplyftning, havets återgång från de översvämmade områdena.

4. Nybildning av stora bergskedjor, återbildning av de kontinentala platåerna.

Förutsättning för denna hypotetiska kretsprocess är först och främst läran om »isostasien», som utsäger, att den stela jordskorpan vilar på ett medium, som ger efter för tryck, så att från och med ett visst djup alla delar befinna sig i hydrostatisk jämvikt. Kontinenterna och deras berg-

massiv simma alltså ungefär som isberg i ett tätare medium, plastiskt gentemot tryck av lång varaktighet. Detta sega medium, på vilket havsbottnen vilar, och vari kontinenterna äro delvis nedsänkta, är basalten, som vid vulkanutbrott träder i dagen i form av lava av nära nog oföränderlig sammansättning.

Alla basaltlavor visa en ringa, men tydlig halt av radioaktiv substans, som är en källa till oavbruten värmeutveckling. Över den svagt radioaktiva basaltmagman ligga de yttre, kontinentala skikten av sura, starkare aktiva bergarter, såsom graniter, kvartsporfyr o. a. Deras aktivitet räcker till att kompensera det utstrålade värmet, temperaturen vid deras undre yta är lika med de angränsande basaltskiktens. Temperaturgradienten i de kontinentala skikten upprätthålles av det i skikten själva utvecklade radioaktiva värmet. Härav följer, att basaltmagmans värmeproduktion icke får något avlopp uppåt; magman uppvärmes. Befinner den sig nära sin smältpunkt, behöves endast en relativt ringa värmetillförsel, för att den skall smälta. Av den ursprungligen mycket sega, dåligt värmeledande magman bildas flera kilometer mäktiga, smältlavor. Härmed äro förutsättningarna givna för mycket ina gripande förändringar av jordytan.

Den smälta lavans spec. vikt är ungefär 7 % mindre än den fasta bergartens, varav den bildats; vid smältningen äger en volymsökning rum. Jordytan kommer att utvidgas och havsbottnen, som utgör den svagaste delen, att remna. Genom sprickorna kommer lava att utträngа, att hastigt stelna och att som följd därav giva åt havsbottnen en väsentligt ökad storlek.

Kontinenterna återigen komma, på grund av lavans lägre spec. vikt att sjunka djupare ned i denna än tidigare i magman. Om således också jordskorpan i sin helhet erfar en höjning, så komma dock kontinenterna att sänkas relativt till oceanerna. Fastlandets lägre delar bliva översvämmade.

På detta stadium skulle jordens existens vara allvarligt hotad, om icke nu månen ingrepe i händelsernas utveck-

ling. Den katastrof, som hotar jorden, är kontinenternas nedsmältning i det överhettade lavalagret. Detta förhindras genom att det smälta lavaskiktet, påverkat av månens attraktion, kommer att bromsa den fasta jordskorpan. Jordskorpan och jordkärnan komma att förskjutas gent emot varandra, och detta kommer att medföra en förskjutning även av lavan, så att de överhettade lavamassorna under kontinenterna efterhand komma under oceanerna. Här är det överlagrande, fasta skalet tunt och täckt av vatten; här äger raskt en bortledning av värmet till havsvattnet rum. Temperaturen under havsbottnen och under kontinenterna sjunker, lavan stelnar.

Härvid minskas dess volym; jordskorpan blir utsatt för starka dragspänningar inåt. Samtidigt stiga kontinenterna upp i magman, havet drar sig tillbaka. Den starkt förstorade havsbottnen trycker på kontinenterna; dessa veckas och pressas i höjden, särskilt de svagare ställen, som förut voro översvämmade, och mest de delar, som gränsa till de största oceanerna. Härpå skulle sålunda bero, att jordens största och högsta bergskedjor gränsa till dess största hav.

Joly räknar med sex dylika revolutioner, sedan de äldsta geologiska skiktens bildning. Vår nuvarande period kännetecknas av en stelnande magma och ett tillstånd av relativ vila. Bergen eroderas, och nya sediment bildas. Men under kontinenterna verkar den radioaktiva energien utan att få avlopp genom havsbottnen. Om 30 till 50 millioner år beräknas magman ånyo vara smält och en ny omvälvning taga sin början; avkylningen åter skulle förlöpa betydligt hastigare och endast kräva några få millioner år.

Allteftersom de radioaktiva grundämnena sönderfalla, bliva revolutionerna långvarigare och mindre våldsamma. De upphöra först, när uran och torium hava försvunnit och övergått i sina »kalla» slutprodukter, uranbly och toriumbly. Men till den tidpunkten dröjer det ännu tusentals millioner år.

G. Starck.

Bokanmälningar.

ISAAC NEWTON, *Naturvetenskapens matematiska principer, Första boken*, översatt och försedd med inledning, översiktlig sammanfattning av innehållet jämte analytiska notiser av C. V. L. CHARLIER, C. W. K. Gleerup, Lund, 1927, XXX + 291 sid. Häft. 15: — kr.

ISAAC NEWTONS *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, detta alla tiders vetenskapliga storverk, vilket LAPLACE betecknat som människoandens yppersta, var epokgörande framför allt i naturvetenskapernas, enkannerligen astronomiens historia, men också i den allmänna kulturhistorien genom den grundläggande betydelse, det fick för det kommande upplysningstidevarvet med dess matematiskt-naturvetenskapliga åskådningssätt.

Principias karaktär av snilledåd framträder ej minst i den fenomenalt korta tid, Newton behövde för framställningen av sina resultat. Enligt egen uppgift skrev han sitt verk på 17 à 18 månader från december 1684 till maj 1686, då han till Royal Society inlämnade manuskriptet till verkets första bok. Endast ett fåtal av de i Principia framställda satserna hade han före denna tid upptäckt. Genom en del ogynnsamma omständigheter fördröjdes utgivandet, och först vid midsommartiden 1687 förelåg det fullständiga verket i tryck, tack vare särskilt astronomen HALLEY, som av egna medel bekostade verkets utgivande.

Principia inledes av ett kapitel »Definitioner», avslutat med anmärkningar angående den absoluta tiden, det absoluta rummet och den absoluta rörelsen, samt ett kapitel »Axiom eller rörelselagar». Arbetets övriga innehåll är uppdelat på tre böcker, de två första avhandlande kroppars rörelse och den tredje, »Om världssystemet», den celesta mekaniken. Medan den första behandlar rörelsen i tomrummet, studeras i den andra rörelsen i resisterande medier. Bland problem, som Newton i tredje boken löser med hjälp av sin gravitationsteori, kan nämnas bestämning av solens och planeternas specifika vikter, beräkning av jordens avplattning, förklaring av ebb- och flodfenomenet, avvikelserna i månens rörelse, ekvinoktieprecessionen och kometbanors bestämmande. Denna bok avslutas med reflexioner över

universums konstitution och om det »eviga, oändliga och fullkomliga väsen», som styr det.

Den första boken är uppdelad på 14 sektioner. Den första handlar om gränsvärden, eller, som Newton uttrycker det, om »metoden med de första och sista förhållandena», en metod, som kommer till användning vid bevisandet av de följande satserna och som är likartad med »fluxionsteorien», vilken fullständigare utvecklas i andra boken. Newtons fluxionslära, om »förhållanden mellan försvinnande kvantiteter», är i själva verket ingenting annat än differentialkalkylen, och hans undersökningar om rörelsen äro till sin natur infinitesimalundersökningar (faktiskt sammanfaller hans hastighetsbegrepp med fluxionsbegreppet). Emellertid ägde han ej en sådan förbindelse mellan analytisk geometri och fluxionsräkning, som tillät honom att kläda sina undersökningar och resultat i analytisk form (arbetet saknar överhuvud formler), utan han stödde sig därvid huvudsakligen på äldre rent geometriska metoder. I närmast följande sektioner behandlas (punkt-)kroppars rörelse under inflytande av centripetalkrafter samt rörelse i koniska sektioner, åtföljd av en rent matematisk behandling av dessa sektioners element, förberedande det i tredje boken lösta banbestämningsproblemet. Sedan han därefter visat, hur kroppens läge i banan kan bestämmas, då denna är given, övergår han till behandlingen av vad man numera benämner den astronomiska störingsteorien; här använder han delvis rent analytiska metoder, hans undersökning av apsidernas rörelse är till sin form så modern, att den mycket väl skulle kunnat vara skriven i det 19:e århundradet. I de sista sektionerna i denna bok övergår Newton att undersöka rörelsen hos kroppar, sammansatta av ett stort antal masspartiklar.

Principia är svårläst bl. a. på grund av sin avsaknad på formler och genom den genomgående rent geometriska bevismetoden. »Har man emellertid», som professor CHARLIER säger i sin inledning till den föreliggande svenska översättningen, »arbetat sig igenom dessa svårigheter, så finner man att det är sällan man genomläser ett verk, så fyllt av matematisk harmoni som Principia och att det är svårt eller omöjligt att finna ett matematiskt arbete, där varje problem, så obetydligt det än må synas, på ett så klart och överlägset sätt ställes i belysning av allmänna principer. Man ser problemen så att säga uppifrån. Särskilt de tre första sektionerna böra härvid framhållas. De kunna i klassisk enkelhet jämföras med *Euklides'* Elementa.»

Kommenterade upplagor finnas av verket i dess helhet eller delar därav. De fullständigaste kommentarerna (på latin) finnas

i en 1739—1742 utgiven upplaga av SEUR och JASQUIER, där varje punkt i verket är klarlagd. För övrigt förekomma översättningar med eller utan kommentarer på tyska, engelska och franska språken.

Det är en värdig hyllning, som i samband med 200-årsminnet av Newtons bortgång ägnats denne det mänskliga snillets storman, då professor C. V. L. CHARLIER utfört det ömtåliga och långt ifrån lätta värvet att kläda Principia i svensk dräkt. Det må sägas, att översättaren på ett synnerligen berömvärt sätt löst sig från sin uppgift, i vad det gäller den hittills föreliggande första boken.

Översättningen prydes, som sig bör, efter titelbladet av ett helsidesstick av Newton samt inledes av en kortfattad skildring av hans liv och upptäckter. Denna svenska översättning är ej kommenterad, men läsningen av arbetet underlättas avsevärt dels genom en av översättaren verkställd kortare översikt av innehållet i de olika sektionerna, dels genom en »Appendix», där en analytisk framställning är given av de viktigaste problemen. Principia utkom i flera upplagor. Den föreliggande översättningen följer den första upplagan, med undantag här och där för delar, som införts från de senare upplagorna.

Det är med stora förväntningar den intresserade allmänheten motser den svenska översättningen av de två återstående böckerna, utförd av samma skickliga hand.

Hjalmar Olson.

J. GABRIEL JONSSON, *Ekvationer och algebra*, P. A. Norstedt & Söners förlag, Stockholm 1927. Del I, 104 sid. Kr. 2: 25; del II, 80 sid. Kr. 1: 90.

Del I innehåller kurs för läroverkens klass 4 och 5, del II för klass 6. Fördelningen av materialet synes åtminstone för undertecknad lyckligt genomförd. Införandet av negativa tal och uppritning av diagram hör väl egentligen enligt kursplanen till klass 5 men torde med fördel kunna uppskjutas till klass 6.

Själva början av del I, där lärjungen skall införas i ekvationsläran, synes mig vara det minst väl behandlade partiet. Att man måste börja med enklast möjliga ekvationstyper, är ju givet, men att tänka sig uppställandet av ekvationen $x + 14{,}5 = 57{,}1$ som *metod* att lösa problemet (N:r 5): vilket tal ger 57,1, om det ökas med 14,5? (formuleringen är f. ö. tvetydig) är väl mindre lämpligt, då ju ekvationen sedan skall lösas med aritmetiskt resonemang. De benämnda uppgifterna på dessa första 12 sidor kunde med fördel ha varit borta nästan alla

och de få återstående formulerats på t. ex. följande sätt: Uppställ den ekvation, som är liktydig med frågan: varmed skall man öka 2,3 för att få $5\frac{7}{8}$ (Ex. 8). Lärjungen bör väl ej bibringas den övertygelsen, att han här får lära sig ett svårt sätt att lösa problem, som han redan förut kan lösa på ett enklare sätt. Det är ju möjligt, att författarens syn på denna sak i själva verket sammanfaller med min, men oklar har framställningen i så fall blivit.

I del II kan undertecknad icke dela författarens åsikt, att diskontavdraget på en växel utgör ränta på växelbeloppet. Avdraget är väl snarast jämförligt med en handelsrabatt på en låt oss säga undermålig vara. Diskontavdraget skall visserligen betäcka en ränteförlust, som annars skulle uppstå, men procenten bestämmes efter andra grunder, än då det gäller t. ex. ett lån. Långa växlar bruka draga en högre procent än de korta. Det hade varit försiktigare att skriva, att diskontavdraget uträknas på samma sätt som en ränta, ehuru (i likhet med handelsrabatten) på det nominella beloppet.

I fråga om beräkningen av kvadratrötter är jag tveksam, om det inte kan löna sig att lära eleverna att själva räkna ut en kvadratrot, ehuru visserligen stadgans metodiska anvisningar avråda. Jag har försökt denna metod jämsides med interpolationsförfarandet och funnit, att särskilt de svagare eleverna ofta föredra att själva beräkna låt oss säga $\sqrt{36{,}51}$. Författaren beräknar med interpolation $\sqrt{36{,}51}$ och $\sqrt{36{,}57}$. Kanske hade det varit lämpligt att påpeka, att resultatet blir osäkert. I båda fallen fås fjärde siffran 1 enhet för hög.

De framställda anmärkningarna avse icke att förringa bokens (såväl del I som II) verkliga och påtagliga förtjänster. Den är välgörande fri från onödiga formler, och exemplen, som ju äro det väsentliga i en sådan bok, äro väl valda och förekomma i riklig mängd. Kanske allt för riklig i del I och vissa partier av del II, men har man väl kommit underfund med, att man varken hinner eller behöver hinna dem alla, kan ju detta på visst sätt vara en fördel. Den kommer säkert att visa sig vara en i det stora hela utmärkt bok, med vilken man bör kunna nå goda resultat — i den mån detta är möjligt med nuvarande lärokurs, som vi väl ha stora utsikter att få behålla. Men ingen skall kunna få mig att tro, att ålders- och mogenhetsstadiet i realskolans högsta klass svarar mot de invecklade problem på t. ex. växlar, aktier, obligationer, kort sagt, de »praktiska» uppgifter i allmänhet, som bruka förekomma i provskrivningen i realskoleexamen. Att en lärobok för detta stadium skall nödgas innehålla även dylika exempel, är

enligt min mening ett fel — ehuru givetvis icke läroboksförfattarens.

Bengt E. Nyström.

HANS PETTERSON, *Atomernas sprängning, en studie i modern alkemi.* Hugo Gebers förlag, Stockholm 1927, 221 sid., häft. kr. 6: 50.

Ledaren av den s. k. Wienskolan, som jämte Cambridgeskolan bearbetat och alltjämt bearbetar problemet att spränga grundämnenas atomkärnor, har tidigare tillsammans med sin främste medarbetare, Dr G. Kirsch, framlagt resultaten av sina och sina medarbetares arbeten i en tysk monografi, Atomzertrümmerung, med vetenskaplig läggning. I ovannämnda skrift vänder han sig till den bildade allmänheten i sitt hemland med en populärt hållen framställning av samma ämne. Såsom naturligt och riktigt, då det gäller en icke initierad publik, har förf. förutskickat de delar av atomfysiken, som för huvudämnets förståelse äro nödvändiga, framför allt av radioaktiviteten. Därpå följer en historisk framställning av atomernas beskjutning, först av Lenard med katodstrålar, resulterande i vissheten, att atomen till största delen utgöres av tomrum. Sedan följer upptäckten av de naturliga vätestrålarna genom Darwin-Marsden, slutligen Rutherfords upptäckt av kvävekärnans sprängning.

Huvuddelen av boken ägnas givetvis åt den noggranna redogörelsen för arbetena vid Institut für Radiumforschung i Wien. Den från Cambridge övertagna något modifierade, s. k. direkta metoden avlöstes snart, på grund av önskvärdheten av att kunna iakttaga atomfragment med kort räckvidd, först av den vinkelräta, sedan av den retrograda metoden. Utarbetandet av dessa metoder, som krävt en experimentell begåvning av icke vanligt mått, har möjliggjort fastställandet av att flera grundämnen, särskilt bland de lätta, äro sprängbara, för vilka förut negativa eller motsägande iakttagelser förelågo. Man är förf. särskilt tacksam för det avsnitt, som han givit titeln »Ett modernt alkemiskt laboratorium», och för den detaljerade och levande beskrivning han här giver av det i Wien pågående experimentella arbetet. Denna del, som är rikt och förträffligt illustrerad, bl. a. med unika fotografier, tagna i mörker, av apparater, fyllda med radiumemanation, måste fängsla varje naturvetenskapligt intresserad och kan säkerligen i fråga om åskådlighet endast överträffas av ett besök på platsen själv.

Ehuru arbetet är populärt, ger det likväl en hel del utöver den tidigare tyska monografien. Man får sålunda här kännedom om de försök, som gjorts att ersätta den subjektiva och tröttande

metoden att räkna scintillationer med fotografiska metoder enligt Wilson och elektriska med användning av Geigers spetskammare. Bl. a meddelar förf., att Geigers spetskammare, kombinerad med en radioutsändare, vid ett tillfälle bjudit Wiens radiolyssnare sensationen av en gevärseld, där endast knallarna voro »makroskopiska», geväret däremot, ett radiumpreparat, hart när mikroskopiskt och projektilerna atomkärnor.

Den tabell över sprängbara grundämnen, vari förf. sammanfattar sina och Rutherfords resultat, upptager 27 element, nämligen alla f. o. m. litium t. o. m. kalium, därjämte Ti, Cr, Fe, Cu, Se, Br, Zr, Sn, Te, J. För några av dem, Li, Be, C och O, har visserligen sprängbarheten icke medgivits från Cambridge, men anses av förf. säkerställd. Även i fråga om utbytet av atomfragment, vilket är av stor betydelse för atomsprängningens teoretiska tolkning och för kärnans struktur, råder en betydande brist på överensstämmelse mellan de båda skolorna. Med intresse avvaktar man de fortsatta undersökningarna på detta atomfysikens nyaste område.

Det är sällsynt, att en vetenskapsman själv förmår att giva en så i bästa mening populär framställning av sitt eget forskningsområde. Den svenska, för naturvetenskapens senaste framsteg intresserade allmänheten har skäl att vara doc. Pettersson tacksam för det aktuella och fängslande verk, som han vid sidan av ett intensivt forskningsarbete har funnit tid att skänka den.

G. Starck.

Uppfinningarnas bok. Del 3. Elektricitetens användning. P. A. Norstedt & Söners förlag, 1927. 892 sid. Klotband 35 kr.

Utarbetad av erfarna fackmän omfattar den tredje delen av Uppfinningarnas Bok ej mindre än 892 sidor med 948 illustrationer, av vilka många äro synnerligen instruktiva.

Bland det rika innehållet finner man många välskrivna kapitel. Så är den avdelning, som handlar om likströmsmaskiner, växelströmsmaskiner, transformatorer, omformare och likriktare både ur historisk och teknisk synpunkt klarläggande. Likaså kapitlet om det elektriska ljuset, där även lagarna för fotometrien och temperaturstrålningen äro klart och enkelt framställda. Egendomligt nog äro båglamporna mycket utförligt behandlade, fastän de huvudsakligen torde ha historiskt intresse. Beskrivningen av kvicksilverlampor, kvartslampor och glimljuslampor kommer säkert att uppskattas och likaså redogörelsen för de elektriska mätinstrumenten. Termoelemente äro dock mycket styvmoderligt behandlade. Deras användning för temperatur-

mätning är ej ens omtalad. Ett mycket vidlyftigt kapitel om ledningar innehåller många värdefulla upplysningar.

I den del, som handlar om elektricitetens motoriska användning, skildras elektrisk motordrift inom den mekaniska industrien, textilindustrien, gruvindustrien m. fl., samt inom transportväsendet, vartill räknas: kranar hissar traverser, spårvagnar och tåg. Det är dock huvudsakligen utländska transportanordningar som behandlas. Statsbaneelektrifieringen Stockholm—Göteborg är mycket ofullständigt beskriven. I ett svenskt arbete av denna art kunde man vänta att få en del upplysningar härom. Likaså letar man förgäves i kapitlet om galvaniska element efter det senaste primärelementet NiCa.

I kapitlet om den elektriska strömmens värmeverkningar redogöres mycket utförligt för elektrisk svetsning och diverse värmeapparater, såsom elektriska nitvärmare, saltbadsugnar, strålningsmaskiner och elektriska spisar. Elektriska ugnar, som användas inom metallurgien, äro ej omnämnda.

Mer än en fjärdedel av hela boken handlar om telegrafi och telefoni. Beskrivningen börjar med en mycket omständig historik och sedan skildras en stor mängd olika system för telegrafering med tråd, samt automattelefoni, långdistanstelefonering, högfrekvenstelefoni m. m. Radiotekniken är enkelt, klart och utförligt behandlad. Boken avslutas med en kortfattad översikt av den elektriska industriens historia.

Egendomligt nog är röntgentekniken, som ju nu för tiden spelar en så stor roll, ej alls omnämnd. Elektrolysen är ej heller medtagen. Visserligen beror detta sannolikt därpå, att densamma kommer att behandlas i 8:e bandet av samma arbete; men utelämnandet av detta kapitel medför att framställningen av galvaniska element och ackumulatorer för den oinvigde blir svårbegriplig. Den elektrolytiska definitionen på strömstyrka förutsätter ju även kännedom om de elektrolytiska fenomenen.

Bland mindre lyckade kapitel må framhållas den ett tjugutal sidor omfattande inledningen. Den översikt som här gives av fysikaliska grundbegrepp såsom ledningsmotstånd, induktion, självinduktion och växelströmmar är alltför summarisk. Endast den som är väl förtrogen med dessa saker förut kan följa framställningen.

Vid genomläsning av boken får man det intrycket att framställningen ofta tynges av en alltför stor rikedom på detaljer. Så får man t. ex. på 80 sidor läsa om elektriska ledningar och distributionssystem, varvid som illustrationsmaterial äro medtagna ej mindre än 19 stora fotografier — med vackra naturbilder — av stolpar för uppbärning av elektriska ledningar. I

kapitlet om kraftstationer får man i detalj reda på ej endast alla svenska kraftverk av betydelse utan även norska, schweiziska och flera amerikanska kraftverk beskrivas utförligt.

Genom denna rikedom på detaljer har arbetet blivit vidlyftigare än det behövt vara. Om materialet sovrats rätt avsevärt, skulle boken säkerligen bättre ha motsvarat sitt ändamål, som väl borde vara att giva en medryckande, intressant, vederhäftig och något så när fullständig framställning av de viktigaste uppfinningarna inom det elektriska området. Priset hade då även säkerligen kunnat regleras nedåt något, vilket skulle ha gjort boken lättare åtkomlig för tekniskt intresserade lärare och elever. För båda dessa kategorier är den ett värdefullt tekniskt uppslagsverk.

C. Bergholm.

HJALMAR OLSON, *Algebra och planimetri för gymnasiet.* Norstedt & Söners förlag, Stockholm 1927. 200 sid. Pris inbunden kr. 5: 25.

Författaren har i sin bok lämnat en klar och redig framställning av gymnasiets kurs i algebra, som såvitt jag kunnat se, är fri från matematiska oriktigheter. Den grafiska framställningen är reducerad till enligt min mening riktiga och lämpliga proportioner, och även i övrigt synes mig framställningen vara ur pedagogisk synpunkt förträfflig. Måhända saknar man de teoretiska sammanfattningar, som avsluta kapitlen i Hedströms och Rendahls lärobok i algebra. Boken innehåller intet av realgymnasiets kurs i differentialkalkyl, men däremot en sammanställning av de vanligaste planimetriska formlerna, kortfattade härledningar av dem samt rikligt med planimetriska exempel.

Exempelsamlingen omfattar ej mindre än 1667 exempel, av vilka de 435 första äro ägnade åt bokstavsräkning. Jag anser det vara synnerligen välbetänkt att åt just denna inledande del av algebrakursen ägna så många exempel av varierande svårighetsgrad. Det behövs ju, som flertalet matematiklärare torde vara villiga medge, mycken övning, för att lärjungarna skola få nödig rutin i bokstavsräkning, och det är då värdefullt att ha ett även för självstudium tillräckligt antal exempel i den använda exempelsamlingen. Författaren har många problem, som leda till ekvationer av första graden med en obekant, men jämförelsevis få, som leda till ekvationer av första graden med flera obekanta. Det synes mig, som om en något bättre proportion mellan dessa båda slags exempel bort eftersträvas.

Tack vare de många planimetriska problemen blir antalet andragradsproblem fullt tillräckligt. Man kan över huvud taget påstå, att exempelsamlingen är så pass rikhaltig, att den jämte samlingen av studentproblem bör räcka till även för de lärjungar, som önska på egen hand bedriva problemlösning i större omfattning än genomsnittslärjungarna. Problemen äro överlag väl valda. Enligt författarens uppgift äro de i allmänhet originalexempel.

Boken avslutas med ett kapitel med rubriken »Anmärkningar och historiska notiser». Författaren synes anse, att Vieta inlagt större förtjänster än Cartesius om bokstavsräkningens utbildande. Hur därmed än må vara, kan det dock ej bestridas, att Cartesius i sin ryktbara »Géométrie» använder en nästan helt och hållet modern bokstavsräkning, under det att Vietas starkt avviker från vår och är avgjort mindre lätthanterlig. Det borde också måhända ha påpekats, att de grekiska matematikerna voro väl förtrogna med irrationaltalen, även om de ej ville inrangera dem i talserien, och att femte boken av Euklides' Elementa i själva verket innehåller teorien för irrationaltalen, ja, att Euklides till och med använder samma definition på irrationaltal som Dedekind, i det att han faktiskt definierar dem som snitt i den rationella talmängden.

Av det ovanstående torde framgå, att jag anser föreliggande lärobok i algebra vara ett synnerligen värdefullt tillskott till den matematiska läroboklitteraturen.

P. G. Persson.

AGNE WAHLGREN, *Lärobok i astronomi.* Femte omarbetade uppl. Gleerupska Univ. bokh. Lund 1926. 63 sid. Kart. kr. 2: —

Läroboken är känd från föregående upplagor för en klar och redig uppställning och en lämplig begränsning av ämnet till vad som rimligen kan medhinnas i skolan. Genom att observationsmetoder och vunna resultat hållas isär vinnes överskådlighet och dessutom frihet för läraren. Även andra metoder än de av förf. föreslagna kunna komma till användning utan att sammanhanget brytes. Angående observationernas ställning säger förf. följande väl motiverade ord: »Utan att i minsta mån vilja underskatta betydelsen av observationerna anser jag emellertid, att med den starkt begränsade tid, som står astronomien till buds, måste målet vara förvärvandet av kunskap om världsalltets byggnad och förståelse för de astronomiska företeelserna. Man måste därför sorgfälligt utgallra allt, som ej syftar mot detta mål, även om det har stor betydelse för den observerande astronomien.»

Vid utgivandet av föreliggande upplaga har förf. gjort en rätt grundlig revision och särskilt utökat framställningen av himlakropparnas fysiska beskaffenhet.

EW. STERNER, *Strövtåg i svensk industri.* J. A. Lindblad 1926. 124 sid. Häft kr. 2: 75.

Det är förvånande mycket, som rymmes i denna lilla volym, n:r 20 i förlagets förträffliga serie »Vad vi veta» Läsaren får följa vår lokindustris storartade utveckling, hur Lilla Edets kraftverk tack vare genialiska svenska män, växte ut till ett av världens märkligaste hydroelektriska verk. Dess gigantiska turbiner och generatorer illustreras och beskrivas, likaså hur de imponerande energibeloppen distribueras till Västra stambanans sinnrika elektrolok, vilka även fått sitt kapitel.

I en andra avdelning — När skogen ger allra högsta valutan — skildras cellulosaindustriens storslagna utveckling, och inblickar ges i de olika grenarnas arbetsmetoder. Den svenska insatsen i de revolutionerande uppfinningarna betonas och imponerar.

På ett enastående lyckligt sätt förenar förf. ett fackmannamässigt språk och en populär stil. Inga torra detaljer tynga; endast huvuddragen komma fram. Och allt i sådan belysning, att såväl lekman som fackman får verklig behållning.

Och så till förf. och förlaget: Flera dylika inspirerande volymer!

JOHN ENBERG och ERIK LÅNGSTRÖM, *Sexställiga tabeller över trigonometriska funktionernas talvärden för centicimal delning.* Utgivna av Kungl. Lantmäteristyrelsen 1925. 164 sid. Klotband kr. 10: —

Innehåller tabeller (talvärden) över sin, cos, tg, cot, sec och cosec mellan 3^c och 97^c för var $1'$, mellan 0^c—3^c och 97^c—100^c för var $10''$, över $\frac{\sin x}{x^c}$, $\frac{x^c}{\sin x}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x^c}$, $\frac{x^c}{\operatorname{tg} x}$ mellan 0^c—15^c för var $10'$. Dessutom finnas tabeller för förvandling från centicimaldelning till sexagesimaldelning och omvänt samt en mindre förteckning upptagande med stor noggrannhet angivna konstanter, såsom potenser av π, jorddimensioner, tidsskillnad, måttenheter.

Uppställningen är synnerligen överskådlig och använda siffertyper mycket tydliga. Differenser angivas i särskild kolumn, och varje sida är försedd med nödiga interpolationstabeller. Tabellverket torde underlätta många beräkningsarbeten, ej blott inom lantmäteriets verksamhetsområde.

MAGNUS BJÖRKSTRAND och FRITZ HELGESSON, *Kemi och varukännedom för praktiska ungdomsskolor.* Stockholm, Albert Bonnier, 1927. 148 sid. Häft. kr. 2: 50.

Förff. hava på grund av det nära sambandet mellan kemi och varukännedom sammanfört dessa båda ämnen i en lärobok. Detta är utan tvivel välbetänkt och ägnat att förhindra upprepningar. Mot den rent kemiska delen, som för övrigt är vederhäftig och väl avvägd, kan den anmärkningen riktas, att införandet av kemiska formler nog får göras på en bredare bas för att leda till verklig förståelse. Atomviktstabellen behöver på ett par punkter revideras. Avdelningen varukännedom förefaller delvis väl mycket detaljrik (se exempelvis färgämnen) och synes ha karaktär mera av läse- än lärobok. Den vid sulfitmetoden använda koksyran beteckna förff. som sulfitlut, vilket är dess namn efter kokningen. 114 enkla, men instruktiva försök ingå i texten. En alldeles utmärkt idé är det att i de statistiska tabellerna reservera blanka kolumner för kommande års siffror. Härigenom kan denna, den mest förgängliga delen av en lärobok lätt hållas modern och olika upplagor användas vid sidan av varandra.

GREGORI AMINOFF, *Om juveler och ädla stenar.* (Bonniers små handböcker i vetenskapliga ämnen 16.) Stockholm, Albert Bonnier, 1926. 138 sid. Häft. kr. 2: 75.

I detta arbete av vårt lands främste auktoritet på mineralogiens område finner kemiläraren en välskriven och intressant monografi över ädelstenar ur vetenskaplig, teknisk och kulturhistorisk synpunkt. För den, som önskar komplettera läroböckernas nödvändigtvis magra upppifter om dessa fascinerande naturföremål, bör prof. Aminoffs bok vara välkommen. Femtioåtta goda bilder ge arbetet ökat värde, och detsamma gäller kanske ännu mer om den tabellariska sammanställningen av ädel- och prydnadsstenar, ordnade efter färg och med de viktigaste fysikaliska konstanterna angivna.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift. Utgiven av Svenska Astronomiska Sällskapet. Årg. VIII, 1927, dubbelhäfte 3 och 4. 104 sid.

Innehåll: R. FURUHJELM, Solar med fjärran ledsagare. STURE HOLM, Det planetariska rotationsproblemet. T. E. AURÉN, Minnen och bilder ur Galilei historia. — Den totala solförmörkelsen den 29 juni 1927 behandlas i uppsatser av BERTIL LIND-

BLAD, KNUT LUNDMARK, ALGOT JENVALL, T. E. AURÉN m. fl. — K. LUNDMARK, Iakttagelser av meteorer, en appell till svenska amatörer. H. v. ZEIPEL, Svante Arrhenius. K. LUNDMARK, Arrhenius och kosmologien. CARL BURRAU, Jens Fredrik Wilhelm Schroeter. Notiser.

Denna utmärkt väl redigerade tidskrift utkommer under 1928 enligt samma plan som hittills med 4 häften på 2 1/2 à 3 tryckark. Tidskriften utdelas kostnadsfritt till Svenska Astronomiska Sällskapets medlemmar. Anmälan om inträde i sällskapet sker under adress: Svenska Astron. Sällskapet, Box 409, Stockholm. Årsavgift 15 kr. Tidskriftens bokhandelspris: 16 kr.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XL, 1918, häft. 1 (24+8 sid.) och 2 (28+16 sid.).

Ur innehållet: N:r 1. PETER KLASON, Om α-granligninets kemiska byggnad. — Litteratur. — Statistiska tabeller. — Meddelanden från Sveriges industrikontor. N:r 2. EMIL MÜLLER, Om etylalkoholens tekniska betydelse för katalytiska reaktioner. KNUT SJÖBERG, Nyare undersökningar över stärkelse och dess enzymatiska spjälkning. — Litteratur. — Statistiska tabeller. — Meddelanden från Sveriges industrikontor.

Vetenskapen och livet. Årg. XIII, N:r 2, febr. 1928 Hugo Geber. Kr. 1: 25 per häfte om 48 sid.

Ur innehållet: Den tyska flygtrafiken. — Det största turbinaggregatet i världen. — En ny metod för återutvinning av gammal kautschuk. — Effekt, energi, verkan. — Från vattenkraft till elektrisk energi. — Kautschukproduktionens framtid. — Ackumulatorn kan befrias från sulfat. — Praktiska radioråd.

Era, Elektricitetens rationella användning. Årg. 1, 1928, häft. 1 och 2. Organ för »Föreningen för elektricitetens rationella användning». Medlemmar: Svenska elektricitetsverksföreningen, Sveriges elektroindustriförening, Elektriska engrossistföreningen, Elektriska entreprenörsföreningen, Svenska föreningen för ljuskultur. Utkommer månatligen, 5 kr. per år, 50 öre per häfte med 16 à 18 textsidor (stor kvart) jämte annonssidor. »*Era* syftar att bli en gedigen facktidskrift, som i vederhäftig, populär och lättläst form klarlägger den elektriska energiens användningsmöjligheter.»

Ur innehållet i n:r 1. Föreningens syften och arbetsplan, Elektrisk kokning, Stockholms elektricitetsverks utvecklingslinjer, Dammsugare, Kraftstatistik. N:r 2. Landsbygdens installationsproblem, Svenska föreningen för ljuskultur, publikationer m. m.

Kataloger m. m.

A. B. Svensk Filmindustris skolfilmavdelning: Katalog n:r 5 över skolfilmer och andra bildningsfilmer 1926—27. — Undervisningsfilm n:r 3 1927. Supplement till föreg. — *Tidskrift för Svensk skolfilm och bildningsfilm.* Årg. kr. 3: —, per häfte 35 öre; 12 häften årligen. I n:r 12, 1927 ges en kort beskrivning av den nya filmen över Sandvikens stålverk, en film som på ett förträffligt sätt — red. har haft tillfälle konstatera detta — ger en bild av arbetet vid ett svenskt järnverk. I avdelningen *Från malm till stål* skildras de olika momenten i stålframställningen, och i en avdelning *I valsverk och smedjor* får man följa stålgötenas bearbetning.

På anmodan av några intresserade Stockholmslärare förevisade skolfilmavdelningen för någon tid sedan denna och en del andra industrifilmer över cellulosatillverkningen, glastillverkning, järntillverkning m. m. Man blev därvid övertygad om att vi äga åtskilliga verkligt goda dylika filmer, vilka vi ej böra försumma att använda vid undervisningen.

Svenska Skolmuseets Filmavdelning. Förteckning över filmer 1925. Kompletteringslista 1927.

Edv. Nerliens A. B. Katalog över skioptikonbilder till uthyrning och försäljning, 1928. I förteckningen finner man bl. a. en synnerligen rikhaltig och mångsidig samling av bilder över industriella processer — tillämpad fysik och kemi, om man så vill — geologiska och astronomiska bildserier (Astronomiska sällskapets serier).

Optiska Instrument A. B. Kungsg. 29, Stockholm. Utförliga kataloger omfattande alla typer av större och mindre filmapparater, maskindelar, tillbehör och reservdelar. Bland skolapparater märker man Zeiss Ikon »Monopol» (800 kr.) och Krupp-Ernemann »Magister» (1500 kr.) samt transportabla »Kinoboxar». Projektionsapparater såsom Zeiss Ikon Handepidiaskop.

Svenska Aktiebolaget Philip. Ny katalog (1928) över glödlampor och specialtillverkningar. Bland de senare märkas för mikroprojektion m. m. avsedda volframbåglampor (ljusbåge mellan volframelektroder i ädelgasfylld ballong) och volframbandlampor samt en ny rörformig synnerligen effektiv projektionslampa för hängande rörläge (se firmans annons). — Bland glimlampor, strålkastarlampor för bilar, cyklar m. m. finner en fysiker åtskilliga för experiment och laborationer lämpliga lamptyper. — Prospekt angående Philips likriktare (efter principen glödkatod

av låg temperatur) upptager dimensioner, strömstyrka, energiförbrukning. Beskrivning av dessa likriktare återfinnes i Meddelande om Ny materiell, häft 4 (1927), Norstedts skolmateriellavd.

Aktiebolaget Elektraverken, Stockholm. Under rubriken »Kungslampan och rationell belysning» har firman utsänt en ny katalog (nov. 1927, 106 sid.), upptagande dels en beskrivning av firmans tillverkningar, dels en värdefull avdelning av allmänt belysningstekniskt intresse, definitioner av ljusstyrka, lumen, lux, glans, ljusfördelningskurvor, belysningstabeller, ljusekonomi, förhållande mellan spänning, wattförbrukning och ljusström hos en glödlampa, råd och anvisningar för rationella belysningsberäkningar.

Siemens & Halske A. G. Broschyrer: Schalttafel-Instrumente (43 sid.), Präzisions-Drehspul-Instrumente (22 sid.), Laboratoriumstype der elektrodyn. Präzisions-Instrumente für Wechselstrom (24 sid.). Äro att betrakta som små monografier över respektive apparattyper. Med deras klara och utmärkt väl illustrerade beskrivningar över instrumentens byggnad och de olika anordningarnas ändamål äro de av stort intresse för fysikläraren. — I Die Laboratoriumsanlagen unserer Messinstrumentenabteilung (30 sid.) beskrivas firmans laboratorier. — Ett särtryck ur »Siemens-Zeitschrift», Heft 8, 1927, innehåller en beskrivning av firmans nya likriktare med glödkatod av toriumbehandlad molybden med argonfyllning och två anoder. Kräver ej högre temperatur än oxidkatodlikriktare (1500°).

Insänd litteratur.

S. Bågman, *Stereometri för realgymnasiet.* Albert Bonniers förlag 1927. 57 sid., kr. 1: 90.

T. Hagren, *Planimetri och stereometri.* Övningsexempel för realskolan och kommunala mellanskolan. Albert Bonniers förlag 1927. 53 sid., kr. 1: 25.

Robert Thoræus, *Kort handledning i fysikalisk teknik.* Albert Bonniers förlag 1927. 115 sid. Häft. kr. 4: 75.

Elvi Rydefält, *Ett, två, tre...* Bonniers räknebok i bilder och tal, 1927. 32 sid. Häft 75 öre.

Magnus Björkstrand och Fritz Helgesson, *Kemi och varukännedom.* (Se sid. 175).

G. Aminoff, *Om juveler och ädla stenar.* (Se sid. 175.)

Agne Wahlgren, *Astronomi.* (Se sid. 173.)

A. G. Högbom, *Sveriges jord och grund.* Serien »Vad vi veta». N:r 21—22. J. A. Lindblads förlag 1927. 230 sid. Häft. kr. 4: 75, klotb. kr. 6: 25.

Ew. Sterner, *Edison, åttio år ur en stor mans liv.* J. A. Lindblads förlag 1927. 252 sid. Häft. kr. 4: 75, inb. kr. 6: —.

EW. STERNER, *Strövtåg i svensk industri.* (Se sid. 174.)

ARVID ODENCRANTS, *Den moderna kinematografien.* Wahlströms & Widstrands förlag 1926. 104 sid. Häft. kr. 2: —.

ELIS och BENGT STRÖMGREN, *Astronomiska miniatyrer*, Ny samling. Wahlström & Widstrand 1927. 166 sid. Häft. kr. 4: 25.

MAX GRENANDER, *Från element till elektron.* Wahlström & Widstrand 1926. 191 sid. Häft. kr. 3: 50.

TORSTEN HASSELSTRÖM, *Kemiska experiment för ungdomen.* Wahlström & Widstrand, 1926. 160 sid. Inb. kr. 3: 50.

ANDERS ÅNGSTRÖM, *Praktisk metereologi.* Serien Natur och Kultur. N:r 60. Bokf. Natur och Kultur 1926. 144 sid, Häft. kr. 2: 25, inb. kr. 3: —.

CARL LUNDAHL, *Den astronomiska världsbilden genom tiderna.* Natur och Kultur. N:r 74. Bokf. Natur och Kultur 1927. 176 sid. Häft. kr. 2: 25, inb. kr. 3: —.

GUNNAR TÖRNSTRAND, *Våra vanligaste metaller, deras framställning, egenskaper och användning.* Natur och Kultur. N:r 76. 1927. 184 sid. Häft. kr. 2: 25, inb. kr. 3: —.

CONRAD SCHWALBE, *Lärobok i räkning för folkskolans överbyggnader.* C. E. Fritzes förlag. Häfte 1, femte uppl. 1926. 52 sid. 60 öre. Häfte 2, tredje uppl. 1924. 56 sid. 60 öre.

BERTIL HARBERG, *Siffror och räkning i gångna tider.* Förf.:s förlag, Sjögestad 1927. 70 sid. Häft. kr. 1: 50.

NILS LARSSON, *Snabbräkningens grunder.* Förf.:s förlag, Askeröd. 56 sid. Häft. kr. 1: —.

MANNE SIEGBAHN, *Naturlagarna och de hela talen.* Uppsala Universitets årsskrift 1927. Lundequistska bokhandeln, Uppsala. 25 sid. Häft. 75 öre.

ANDERS ÅNGSTRÖM, *Atmosfären.* 202 sid. KNUT LUNDMARK, *Stjärnrymden.* 299 sid. Bilda tillsammans tredje delen i serien »Himmel, hav och jord». Lars Hökerbergs förlag 1927. Häft. kr. 13: 50, inb. kr. 16: 50.

F. ALBRECHT, H. VOIGTS, A. PAECH, *Grundzüge der Meteorologie und ihre unterrichtliche Behandlung in Volks- und höheren Schulen.* Verlag Otto Salle, Berlin 1927. 169 sid. Häft. Rm. 8: —, bunden Rm. 10: —.

W. LIETZMANN, *Aufbau und Grundlage der Mathematik.* B. G. Teubner, Leipzig, 1927. 89 sid. Kart. Rm. 2: 20.

KARL HAHN u. WILHELM KOCH, *Physikalische Schülerübungen.* B. G. Teubner, 1927. 2 Aufl. 140 sid. Kart. Rm. 3: 20.

K. SCHEID, *Chemisches Experimentierbuch.* B. G. Teubner 1919 och 28. 2 delar. 190+207 sid. Inb. 3: 80+4: — M.

J. K. ERIKSEN och JOHS. KOFOED, *Fysik för Gymnasiet.* Varmelære (1926), 76 sid. Inb. kr. 2: 75. Lyslære (1927), 80 sid. Inb. kr. 2: 75. Elektricitet I. (1928), 98 sid. Inb. kr. 3: 25. J. H. Schultz Förlag, København.

D. M. TURNER, *History of Science Teaching in England.* Chapman & Hall, London 1927. 208 sid. Inb. 7 s. 6 d.

PEDAGOGISK TIDSKRIFT, 64:e årg. 1928, häft 1 och 2.

IVAR J:SON MALMBORG, *Handledning vid experimentell fysikundervisning* i folkskolor, flickskolor, kommunala mellanskolor. P. A. Norstedt & Söner 1927. 104 sid. Häft. kr. 2: 80.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

287) n är ett positivt helt tal. I en konvergent geometrisk serie med reella termer är $s_n = 1$; $s_{3n} = k$. Beräkna s_∞! Möjlighetsvillkor? *X.*

288) Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna från två fasta punkter till en parabel, vars topp glider utefter punkternas föreningslinje. *Iter.*

289) I en likbent triangel delas basen i tre lika delar och delningspunkterna sammanbindas med spetsen. Hur stor skall vinkeln vid spetsen vara, för att vinklarna mellan en av dessa linjer och närliggande ben skall bli så stor som möjligt?

290) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{x+z-y}\cdot\sqrt{x+y-z} &= x\sqrt{yz} \\ b\sqrt{x+y-z}\cdot\sqrt{y+z-x} &= y\sqrt{xz} \\ c\sqrt{y+z-x}\cdot\sqrt{x+z-y} &= z\sqrt{xy} \end{aligned}\right\}$$

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

291) Rötterna till ekvationen $x^2+px+q=0$ må betecknas med a och b. Beräkna värdet av $\dfrac{2a-b}{b^2}+\dfrac{2b-a}{a^2}$.

Svar: $\dfrac{p(7q-2p^2)}{q^2}$.

292) Bestäm logaritmerna för rötterna till ekvationen $4(x^4+1)+42x^2=25x(x^2+1)$ i det system, vars bas är $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2}$. Svar: 0; $\pm 2{,}5$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

293) En cirkels periferi är delad i 6 bågar, som bilda aritmetisk serie och den största bågens korda är 4 gånger så stor som den minsta bågens korda. Angiv den minsta bågens medelpunktsvinkel. Svar: 21°,7 8.

294) Tre linjer

$$L_1 \equiv 2y - x = 0;\ L_2 \equiv y - 2x;\ L_3 \equiv y + 3x = 0$$

äro givna. Bestäm ekvationen för en genom punkten (3; 0) gående linje, vars mellan L_1 och L_3 belägna del delas mitt itu av L_2. Svar: $4x + 13y - 12 = 0$.

295) Två av en triangels hörn ha koordinaterna (2; 3) och (— 4; — 5). Ytan är 15 ytenheter. Sök koordinaterna för det tredje hörnet, om det ligger på linjen $y = 3x + 7$. Svar: (— 1; 4) eller (— 7; — 14).

296) Att med given hypotenusa upprita en rätvinklig triangel, i vilken medianen mot ena kateten är vinkelrät mot medianen till hypotenusan.

Lösningar till uppg. 258, 265, 266, 267, 268.

258) *En godtycklig punkt P på ett kägelsnitt förenas med de båda brännpunkterna F och F_1. Sök orten för triangeln PFF_1:s in- och vidskrivna cirklars medelpunkter.* *Iter.*

1. Antag först, att kägelsnittet är en *ellips*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

och låt P:s koordinater vara (x_1, y_1). Vi betrakta till en början den i PFF_1 *inskrivna* cirkelns medelpunkt I. Om triangelns omkrets är $= 2p$, brännpunktsradien $FP = r$, har man $c + x = p - r = (a + c) - (a - ex_1)$,

varav $$x = ex_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Om vidare T är triangelns yta, så är den inskrivna cirkelns radie

$$y = \frac{T}{a+c} = \frac{cy_1}{a+c}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ur (1) och (2) får man

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{e}, \\ y_1 = \dfrac{a+c}{c} \cdot y = (1+e) \cdot \dfrac{y}{e}. \end{cases}$$

Då (x_1, y_1) ligger på ellipsen, har man

$$\frac{x^2}{a^2e^2} + \frac{y^2(1+e)^2}{b^2e^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Orten för punkten I är således i detta fall en ellips med halvaxellängderna c och $\dfrac{be}{1+e} = c\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$.

Koordinaterna för medelpunkten I_c till den vidskrivna cirkel, som tangerar brännpunktsradiernas förlängningar, äro

$$x = -ex_1, \; y = -\frac{cy_1}{a-c},$$

varav

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x}{e}, \\ y_1 = -\dfrac{a-c}{c} \cdot y = -\dfrac{1-e}{e} \cdot y. \end{cases}$$

Orten för denna punkt är således ellipsen

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2(1-e)}{b^2e^2} = 1$$

med halvaxellängderna c och $\dfrac{be}{1-e} = c\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}$.

Abscissan för medelpunkten I_r till den cirkel, som tangerar sidan FP och de övrigas förlängningar, satisfierar ekv.

$$c + x = p = a + c,$$

varav

$$x = a.$$

Medelpunkten till denna cirkel ligger således på den ena topptangenten. Medelpunkten till den cirkel, som tangerar sidan F_1P och de båda andras förlängningar, ligger på den andra topptangenten.

2. Antag nu, att kägelsnittet är en *hyperbel*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

För brännpunktsradierna till punkten P har man då uttrycken

$$r = \pm(ex - a),$$

$$r_1 = \pm(ex_1 + a),$$

således

$$r + r_1 = \pm 2ex_1$$

och

$$p = c \pm ex_1.$$

För medelpunkten I har man då

$$c + x = p - r = (c \pm ex_1) \mp (ex_1 - a)$$

eller

$$x = \pm a.$$

Medelpunkten I ligger således på ena eller andra topptangenten.

Detsamma gäller för medelpunkten I_c. För denna har man nämligen

$$c + x = p - r_1 = c \pm ex_1 \mp (ex_1 + a) = c \mp a.$$

I och I_c beskriva, såsom lätt inses, olika delar av topptangenterna.

För I_r har man

$$c + x = p = c + ex_1,$$

således

$$x = \pm ex_1,$$

$$y = \frac{cy_1}{p - r} = \frac{cy_1}{c \pm a},$$

för I_{r_1} åter

$$c - x = p = c \pm ex_1,$$

således

$$x = \mp ex_1,$$

$$y = \frac{cy_1}{p - r_1} = \frac{cy_1}{c \mp a}.$$

I förra fallet är

$$x_1 = \pm\frac{x}{e},\quad y_1 = \frac{c \pm a}{c} \cdot y = \frac{e \pm 1}{e} \cdot y,$$

i senare fallet

$$x_1 = \frac{-x}{+e}, \quad y_1 = \frac{c+a}{c} \cdot y = \frac{e+1}{e} \cdot y.$$

I_r och I_{r_1} beskriva således olika delar av hyperblerna

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2(e+1)^2}{b^2e^2} = 1$$

med halvaxellängderna c och $c\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ resp. $c\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$.

3. För *parabeln* ligger den ena brännpunkten på oändligt avstånd. Två triangelsidor bliva då parallella, varför man i detta fall endast kan tala om *två inskrivna cirklar*. Dessa utgöra, såsom lätt lätt inses, orter för fotpunkterna av de perpendiklar, som från brännpunkten fällas mot tangenten och normalen i en på parabeln rörlig punkt (x_1, y_1). Den förra orten utgöres, som bekant, av parabelns topptangent. Ekvationen för den senare orten kan erhållas på följande sätt:

Låt parabelns ekvation vara

$$y^2 = 4ax.$$

Då normalen halverar vinkeln mellan brännpunktsradien och diametern genom (x_1, y_1), bevisas lätt, att den betraktade fotpunkten ligger i normalens mittpunkt. Då vidare subnormalen är $=2a$, har man relationerna

$$\begin{cases} x_1 = x - a, \\ y_1 = 2y. \end{cases}$$

Insättas dessa uttryck för x_1 och y_1 i parabelns ekvation, erhålles ekvationen för den sökta orten

$$y^2 = a(x - a).$$

De sökta orterna utgöras således, för kägelsnitt med medelpunkt, av topptangenterna och två kägelsnitt av samma art som det ursprungliga, med bikontakt i dettas brännpunkter, för parabeln av topptangenten och en parabel, vars topp ligger i den ursprungliga parabelns brännpunkt.

Iter.

Även löst av *X*.

Atomviktstabell 1928.

Ag	Silver	107,88	Mn	Mangan	54,93
Al	Aluminium	26,97	Mo	Molybden	96,0
Ar	Argon	39,94	N	Kväve	14,008
As	Arsenik	74,96	Na	Natrium	22,997
Au	Guld	197,2	Nb	Niobium	93,5
B	Bor	10,82	Nd	Neodym	144,27
Ba	Barium	137,37	Ne	Neon	20,2
Be	Beryllium	9,02	Ni	Nickel	58,68
Bi	Vismut	209,00	**O**	**Syre**	**16,000**
Br	Brom	79,916	Os	Osmium	190,9
C	Kol	12,00	P	Fosfor	31,04
Ca	Kalcium	40,07	Pb	Bly	207,20
Cd	Kadmium	112,40	Pd	Palladium	106,7
Ce	Cerium	140,2	Pr	Praseodym	140,92
Cl	Klor	35,457	Pt	Platina	195,2
Co	Kobolt	58,97	Ra	Radium	225,97
Cp	Cassiopeium	175,0	Rb	Rubidium	85,45
Cr	Krom	52,01	Rh	Rodium	102,9
Cs	Cäsium	132,81	Ru	Rutenium	101,7
Cu	Koppar	63,57	S	Svavel	32,07
Dy	Dysprosium	162,5	Sb	Antimon	121,76
Em	Emanation	222	Sc	Skandium	45,10
Er	Erbium	167,7	Se	Selen	79,2
Eu	Europium	152,0	Si	Kisel	28,06
F	Fluor	19,00	Sm	Samarium	150,4
Fe	Järn	55,84	Sn	Tenn	118,70
Ga	Gallium	69,72	Sr	Strontium	87,63
Gd	Gadolinium	157,3	Ta	Tantal	181,5
Ge	Germanium	72,60	Tb	Terbium	159,2
H	Väte	1,008	Te	Tellur	127,5
He	Helium	4,00	Th	Torium	232,12
Hf	Hafnium	178,6	Ti	Titan	47,90
Hg	Kvicksilver	200,61	Tl	Tallium	204,39
Ho	Holmium	163,5	Tu	Tulium	169,4
In	Indium	114,8	U	Uran	238,18
Ir	Iridium	193,1	V	Vanadium	51,0
J	Jod	126,92	W	Volfram	184,0
K	Kalium	39,104	X	Xenon	130,2
Kr	Krypton	82,9	Y	Yttrium	88,93
La	Lantan	138,90	Yb	Ytterbium	173,5
Li	Litium	6,94	Zn	Zink	65,38
Mg	Magnesium	24,32	Zr	Zirkonium	91,25

Talen $\frac{\alpha^\varphi - \beta^\varphi}{2}$ och $\frac{\alpha^\varphi + \beta^\varphi}{2}$ och deras relationer.

Av KARL BLIX.

(Forts.)

Kap. 5.

Satser beträffande delbarheten av talen U_n och V_n ($2V_n$).

I det följande antaga vi, att $2a$ och b äro *hela* positiva eller negativa tal, då även, enligt vad som visats i kap. 3, talen U_n och V_n (eller $2V_n$, om $2a$ är ett udda tal) äro hela tal. Hava $2a$ och b någon gemensam faktor, ingår denna på grund av (46) i alla U_n från och med U_2 och på grund av (41) i alla V_n (eller $2V_n$) från och med V_2 (eller $2V_2$).

Vi antaga därför i det följande, att $2a$ och b äro *relativa primtal.*

Anm. Äro även α och β hela tal, så måste även de på grund av den gjorda förutsättningen vara relativa primtal, ty hade de en gemensam faktor, så måste denna på grund av $\alpha + \beta = 2a$ ingå som faktor i $2a$ och på grund av $\alpha\beta = b$ även ingå som faktor i b. Härav följer, att om α och β äro hela tal, så kunna de ej båda vara jämna. Äro båda udda blir $2a$ ett jämnt tal och b ett udda tal; är det ena av dem ett jämnt och det andra ett udda tal, så blir $2a$ ett udda tal men b ett jämnt tal. Äro alltså α och β hela tal, så kunna ej både $2a$ och b vara udda tal.

Sats 1.

U_{n+1} och U_n äro relativa primtal.

Bevis: Antag, att U_{n+1} och U_n hava en gemensam *prim*faktor p. Då enligt (46) $U_{n+1} = 2aU_n - bU_{n-1}$, så måste p

ingå som faktor i bU_{n-1}. Av de tre tänkbara fallen: 1) p faktor i b, men ej i U_{n-1}, 2) p faktor i U_{n-1}, men ej i b, 3) p faktor i både b och U_{n-1}, är det första orimligt, ty vore p faktor i b (och alltså gemensam faktor till U_n och b), så måste på grund av $U_n = 2aU_{n-1} - bU_{n-2}$, p vara faktor i $2aU_{n-1}$. Vore p ej faktor i U_{n-1}, så måste alltså p vara faktor i $2a$ och alltså gemensam faktor till $2a$ och b, vilket strider mot förutsättningen ($2a$ och b relativa primtal). Är alltså p gemensam faktor till U_{n+1} och U_n, så ingår p som faktor även i U_{n-1}, U_{n-2}, . . . U_1. Men $U_1 = 1$, och alltså kunna U_{n+1} och U_n ej hava någon annan gemensam faktor än 1.

Anm. Fallet 3) i föregående bevis är också orimligt, ty vore p gemensam faktor till b och U_{n-1}, skulle denna faktor på grund av $U_n = 2aU_{n-1} - bU_{n-2}$ även ingå som faktor i U_n, vilket strider mot den nyss bevisade satsen. Härav följer, att *alla tal* U_n *äro relativa primtal till* b.

Sats 2.

V_{n+1} och V_n äro relativa primtal, om $2a$ är ett jämnt tal, och är $2a$ ett udda tal, gäller detsamma om $2V_{n+1}$ och $2V_n$.

Beviset för förra delen av satsen är lika med föregående bevis, om U utbytes mot V. (Obs! $V_0 = 1$.)

Om $2a$ är ett udda tal, bevisas på samma sätt, att varje gemensam primfaktor till $2V_{n+1}$ och $2V_n$ också måste vara faktor i $2V_{n-1}$, $2V_{n-2}$ . . . $2V_1$ och $2V_0$. Men då $2V_1 = 2a$ och $2V_0 = 2$, och då dessa tal ej ha någon annan gemensam faktor än 1, kunna $2V_{n+1}$ och $2V_n$ ej heller hava någon annan gemensam faktor.

Anm. Liksom i föregående sats bevisas, att *talen* V_n (*eller* $2V_n$) *äro relativa primtal till* b.

Sats 3.

Om $2a$ är ett jämnt tal, så äro U_n och V_n relativa primtal, men om $2a$ är ett udda tal, kan möjligen 2 men intet annat tal vara gemensam faktor till U_n och $2V_n$.

Bevis för förra delen av satsen: Om $\boldsymbol{U}_n$ och V_n hade en gemensam faktor, så måste denna på grund av (49): $V_n = \boldsymbol{U}_{n+1} - a\boldsymbol{U}_n$ även vara faktor i $\boldsymbol{U}_{n+1}$. Då skulle $\boldsymbol{U}_{n+1}$ och $\boldsymbol{U}_n$ alltså hava en gemensam faktor, vilket strider mot sats 1. Alltså måste $\boldsymbol{U}_n$ och V_n vara relativa primtal.

Bevis för senare delen av satsen: Om p är en gemensam faktor till $\boldsymbol{U}_n$ och $2V_n$, så är på grund av $2V_n = 2\boldsymbol{U}_{n+1} - 2a\boldsymbol{U}_n$ p även faktor i $2\boldsymbol{U}_{n+1}$. Men enligt sats 1 kan p ej vara faktor i $\boldsymbol{U}_{n+1}$ och måste därför vara faktor i 2. Endast 2 kan alltså vara gemensam faktor till $\boldsymbol{U}_n$ och $2V_n$, när $2a$ är ett udda tal.

Sats 4.

Om n är en mångfald av d (alltså $n = md$), *så är $\boldsymbol{U}_n$ en mångfald av $\boldsymbol{U}_d$.*

Bevis: Utbytes i (26) och (28) φ mot d, får man med användning av (44):

$$\frac{\boldsymbol{U}_{md}}{\boldsymbol{U}_d} = 2V_{(m-1)d} + b^d \cdot 2V_{(m-3)d} + \ldots,$$

där sista termen är $b^{\frac{m-2}{2} \cdot d} \cdot 2V_d$ eller $b^{\frac{m-1}{2} \cdot d}$, allteftersom m är ett jämnt eller udda tal. Då $2V_n$ alltid är ett helt tal, så blir i båda fallen alla termer i högra ledet hela tal, och alltså $\boldsymbol{U}_{md}$ en mångfald av $\boldsymbol{U}_d$.

Följdsats. Är d gemensam faktor till m och n, så är $\boldsymbol{U}_d$ gemensam faktor till $\boldsymbol{U}_m$ och $\boldsymbol{U}_n$.

Sats 5.

Är d största gemensamma divisorn till m och m_1, så är varje gemensam divisor till $\boldsymbol{U}_m$ och $\boldsymbol{U}_{m_1}$ också divisor till $\boldsymbol{U}_d$.

Insättes (51) och (49) i (47), fås en formel, som här kommer till användning:

$$\boldsymbol{U}_{n+n_1} = \boldsymbol{U}_n(a\boldsymbol{U}_{n_1} - b\boldsymbol{U}_{n_1-1}) + \boldsymbol{U}_{n_1}(\boldsymbol{U}_{n+1} - a\boldsymbol{U}_n) = \\ = \boldsymbol{U}_{n+1}\boldsymbol{U}_{n_1} - b\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_{n_1-1}. \quad \ldots \quad (53)$$

Bevis: Då d är största gemensamma divisorn till m och m_1, så blir, om $m > m_1$, enligt Euklides' algoritm:

$$\left.\begin{aligned} m &= m_1 k_0 + a_1 \\ m_1 &= a_1 k_1 + a_2 \\ a_1 &= a_2 k_2 + a_3 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= a_{n-1} k_{n-1} + d \\ a_{n-1} &= d k_n \end{aligned}\right\} \quad -$$

Enligt (53) är $U_m = U_{m_1 k_0 + a_1} = U_{m_1 k_0 + 1} U_{a_1} - b U_{m_1 k_0} U_{a_1 - 1}$. Varje faktor i U_{m_1} är (enligt sats 4) även faktor i $U_{m_1 k_0}$, med andra ord: varje gemensam faktor till U_m och U_{m_1} är även gemensam faktor till U_m och $U_{m_1 k_0}$. Denna faktor måste då även vara faktor i $U_{m_1 k_0 + 1} U_{a_1}$. Men då (enligt sats 1) $U_{m_1 k_0 + 1}$ och $U_{m_1 k_0}$ äro relativa primtal, så måste varje gemensam faktor till U_m och U_{m_1} även vara faktor i U_{a_1}. På samma sätt bevisas, att varje gemensam faktor till U_{m_1} och U_{a_1} även måste vara faktor i U_{a_2}, $U_{a_3} \ldots U_d$.

Följdsats 1. Är d S.G.D. till m och m_1, så är U_d S.G.D. till U_m och U_{m_1}, ty enligt följdsatsen till sats 4 är då U_d gemensam divisor till U_m och U_{m_1}, och enligt den nyss bevisade satsen är varje gemensam divisor till U_m och U_{m_1} även divisor till U_d.

Följdsats 2. Äro m och m_1 relativa primtal, så äro även U_m och U_{m_1} relativa primtal, ty då är deras *S.G.D.* $U_1 = 1$.

Följdsats 3. Är p ett primtal, så kunna $U_2, U_3, \ldots U_{p-1}$ ej hava någon gemensam faktor med U_p, ty $U_1 = 1$ blir då *S.G.D.* till U_p och varje föregående U.

Följdsats 4. Endast om p är ett primtal, kan U_p vara ett primtal, försåvida $U_1, U_2, \ldots U_p$ bilda en ständigt växande talserie (ty i annat fall kan möjligen U_r vara $= 1$ och U_{hr} vara ett primtal).

Sats 6.

Om n är en udda mångfald av d (alltså $n = md$, där m är ett udda tal), *så är V_n en mångfald av V_d, eller $2V_n$ en mångfald av $2V$, allteftersom 2a är ett jämnt eller udda tal.*

Bevis: Utbytes i (29) φ mot d, så blir:

$$\frac{V_{md}}{V_d} = 2V_{(m-1)d} - b^d \cdot 2V_{(m-3)d} + b^{2d} \cdot 2V_{(m-5)d} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot b^{\frac{m-1}{2} \cdot d},$$

och då alla termerna i högra ledet äro hela tal, är därmed satsen bevisad.

Följdsats 1. Om n är ett udda tal, så är V_n en mångfald av a, eller $2V_n$ en mångfald av $2a$, allteftersom $2a$ är ett jämnt eller udda tal, ty enligt (39) är $V_1 = a$.

Följdsats 2. Om n och n_1 äro udda mångfalder av d, så är V_d gemensam faktor till V_n och V_{n_1}, eller $2V_d$ gemensam faktor till $2V_n$ och $2V_{n_1}$, allteftersom $2a$ är ett jämnt eller udda tal.

Sats 7.

Om d är största gemensamma divisorn till m och m_1 och de övriga faktorerna $\frac{m}{d}$ och $\frac{m_1}{d}$ båda äro udda tal, så är varje gemensam faktor till V_m och V_{m_1} även faktor i V_d, eller varje gemensam udda faktor till $2V_m$ och $2V_{m_1}$ även faktor i $2V_d$, allteftersom $2a$ är ett jämnt eller udda tal.

Endast beviset för det fall, att $2a$ är ett jämnt tal behöver lämnas, då det andra fallet bevisas på alldeles analogt sätt. För beviset behöva vi ett par nya formler, som därför först härledas.

Insättes (49) och (52) i (48), fås:

$$V_{n+n_1} = V_n(\boldsymbol{U}_{n_1+1} - a\boldsymbol{U}_{n_1}) + \boldsymbol{U}_{n_1}(aV_n - bV_{n-1}) =$$
$$= V_n\boldsymbol{U}_{n_1+1} - bV_{n-1}\boldsymbol{U}_{n_1} \quad \ldots \quad (54)$$

eller om n utbytes mot $n+1$ och n_1 mot $n_1 - 1$:

$$V_{n+n_1} = V_{n+1}\boldsymbol{U}_{n_1} - bV_n\boldsymbol{U}_{n_1-1}. \quad \ldots \quad (55)$$

Bevis: Om $a_n = d$ är *S.G.D.* till m och m_1 $(m > m_1)$, så är enligt (γ) i kap. 4:

$$\left.\begin{aligned} m &= m_1 k_0 \pm a_1 \\ m_1 &= a_1 k_1 \pm a_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= a_{n-1} k_{n-1} \pm a_n \\ a_{n-1} &= a_n k_n \end{aligned}\right\}$$

där $k_0, k_1, \ldots k_{n-1}$ äro udda tal och $m > m_1 > a_1 > \ldots > a_n \geqq 1$.

Enligt (55) får man:

$$V_m = V_{m_1 k_0 \pm a_1} = V_{m_1 k_0 + 1} \boldsymbol{U}_{\pm a_1} - b V_{m_1 k_0} \boldsymbol{U}_{\pm a_1 - 1}.$$

Är alltså $m = m_1 k_0 + a_1$, får man:

$$V_m = V_{m_1 k_0 + 1} \boldsymbol{U}_{a_1} - b V_{m_1 k_0} \boldsymbol{U}_{a_1 - 1} \quad \ldots \quad (56)$$

och är $m = m_1 k_0 - a_1$, får man, då enligt (4) och (44) $\boldsymbol{U}_{-n} = -\frac{\boldsymbol{U}_n}{b^n}$:

$$b^{a_1} V_m = V_{m_1 k_0} \boldsymbol{U}_{a_1 + 1} - V_{m_1 k_0 + 1} \boldsymbol{U}_{a_1} \quad \ldots \quad (57)$$

Är nu p gemensam faktor till V_m och V_{m_1}, så är (enligt sats 6) p gemensam faktor till V_m och $V_{m_1 k_0}$ och alltså enligt (56) eller (57) även faktor i $V_{m_1 k_0 + 1} \boldsymbol{U}_{a_1}$. Men då $V_{m_1 k_0}$ och $V_{m_1 k_0 + 1}$ äro relativa primtal (enligt sats 2), så måste p *vara faktor i* $\boldsymbol{U}_{a_1}$.

Enligt (54) är:

$$V_{m_1} = V_{a_1 k_1 \pm a_2} = V_{\pm a_2} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1 + 1} - b V_{\pm a_2 - 1} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1}$$

och alltså antingen:

$$V_{m_1} = V_{a_2} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1 + 1} - b V_{a_2 - 1} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1} \quad \ldots \quad (58)$$

eller

$$b^{a_2} V_{m_1} = V_{a_2} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1 + 1} - V_{a_2 + 1} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1} \quad \ldots \quad (59)$$

Då nu p är faktor i $\boldsymbol{U}_{a_1}$, så är p även faktor i $\boldsymbol{U}_{a_1 k_1}$ (enligt sats 4) och alltså enligt (58) eller (59) även faktor i $V_{a_2} \boldsymbol{U}_{a_1 k_1 + 1}$. Men $\boldsymbol{U}_{a_1 k_1}$ och $\boldsymbol{U}_{a_1 k_1 + 1}$ äro relativa primtal (enligt sats 1). *Alltså är* p *faktor i* V_{a_2}.

Enligt (47) är:

$$\boldsymbol{U}_{a_1} = \boldsymbol{U}_{a_2 k_2 \pm a_3} = \boldsymbol{U}_{a_2 k_2} V_{\pm a_3} + V_{a_2 k_2} \boldsymbol{U}_{\pm a_3}$$

och alltså antingen:

$$\boldsymbol{U}_{a_1} = \boldsymbol{U}_{a_2 k_2} V_{a_3} + V_{a_2 k_2} \boldsymbol{U}_{a_3} \quad \ldots \quad (60)$$

eller

$$b^{a_3} \boldsymbol{U}_{a_1} = \boldsymbol{U}_{a_2 k_2} V_{a_3} - V_{a_2 k_2} \boldsymbol{U}_{a_3} \quad \ldots \quad (61)$$

Då nu p är faktor i V_{a_2}, så är (enligt sats 6) p faktor även

i $V_{a_2 k_2}$ och alltså gemensam faktor till $\boldsymbol{U}_{a_1}$ och $V_{a_2 k_2}$, och alltså måste p enligt (60) eller (61) också vara faktor i $\boldsymbol{U}_{a_2 k_2} V_{a_3}$. Men $\boldsymbol{U}_{a_2 k_2}$ och $V_{a_2 k_2}$ äro relativa primtal (enligt sats 3). *Alltså är p faktor i V_{a_3}.*

Vi hava alltså bevisat, att om p är gemensam faktor till V_m och V_{m_1}, så är p även faktor i $\boldsymbol{U}_{a_1}$, V_{a_2} och V_{a_3}. På samma sätt kan man därefter fortsätta, så långt restserien $a_1, a_2, \ldots a_n$ räcker, och bevisa att p är faktor i $\boldsymbol{U}_{a_4}$, V_{a_5}, V_{a_6}, $\boldsymbol{U}_{a_7}$ o. s. v. Men då (enligt satsen å sid. 20) sista resten $d = a_n$ måste vara antingen av formen $a_{3\nu-1}$ eller $a_{3\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) men aldrig av formen $a_{3\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$), så kan ej heller denna beviskedja ha $\boldsymbol{U}_{a_{3\nu+1}}$ till sista länk, utan den måste sluta med $V_{a_{3\nu-1}}$ eller $V_{a_{3\nu}}$, eller, då $a_{3\nu-1}$ eller $a_{3\nu}$ är $= d$, med V_d.

Följdsats 1. Är d S.G.D. till m och m_1 och därjämte de övriga faktorerna $\frac{m}{d}$ och $\frac{m_1}{d}$ båda äro udda tal, så är V_d S.G.D. till V_m och V_{m_1}, eller största udda faktorn i $2V_d$ största gemensamma udda divisorn till $2V_m$ och $2V_{m_1}$, allteftersom $2a$ är ett jämnt eller udda tal.

Följdsats 2. Äro m och m_1 udda tal utan någon gemensam faktor, så är a S.G.D. till V_m och V_{m_1}, eller $2a$ S.G.D. till $2V_m$ och $2V_{m_1}$, allteftersom $2a$ är ett jämnt eller udda tal.

Följdsats 3. Om serien $V_0, V_1, V_2 \ldots$ eller $2V_0, 2V_1, 2V_2 \ldots$ (allteftersom $2a$ är ett jämnt eller udda tal) är ständigt stigande, kan V_n eller $2V_n$ endast då vara ett primtal, när n är en dignitet av 2.

Sats 8.

Är n en jämn mångfald av d (alltså $n = md$, där m är ett jämnt tal), *så är $\boldsymbol{U}_n$ en mångfald av $2V_d$.*

Bevis: Utbytes i (27) φ mot d och insättes (44), fås:

$$\frac{\boldsymbol{U}_{md}}{2V_d} = \boldsymbol{U}_{(m-1)d} - b^d \cdot \boldsymbol{U}_{(m-3)d} + \ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot b^{\frac{m-2}{2} \cdot d} \boldsymbol{U}_d .$$

När nu högra ledets samtliga termer äro hela tal, så är därmed satsen bevisad.

Kap. 6.

Exempel på användningen av rekurrenta tal.

Beräkning av kvadratrötter. Enligt (43), (I) och (II) är

$$\frac{V_n}{\boldsymbol{U}_n}=\frac{\delta}{2}\cdot\frac{V_n}{U_n}=\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^n-\beta^n}=\frac{\delta}{2}\cdot\frac{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}.$$

Om $|\alpha|>\beta$, så blir $\frac{|\beta|}{|\alpha|}<1$, och alltså $\lim_{n=\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$.

$$\therefore\ \lim_{n=\infty}\frac{V_n}{\boldsymbol{U}_n}=\frac{\delta}{2}\left(\text{eller}=-\frac{\delta}{2},\ \text{om}\ |\alpha|<|\beta|\right).$$

Härpå grundar sig beräkningen av kvadratrötter med tillhjälp av rekurrenta tal. Insättes (44) i (8), och sättes $\varphi_1=n$, $\varphi-\varphi_1=r$ $\because\ \varphi=n+r$, fås:

$$\boldsymbol{U}_{n+r}V_n-V_{n+r}\boldsymbol{U}_n=b^n\boldsymbol{U}_r$$

och efter division med $\boldsymbol{U}_{n+r}\boldsymbol{U}_n$:

$$\frac{V_n}{\boldsymbol{U}_n}-\frac{V_{n+r}}{\boldsymbol{U}_{n+r}}=\frac{b^n\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_{n+r}}.$$

Utbytes n mot $n+r$, $n+2r$, . . . $n+(k-1)r$, och adderas de så erhållna ekvationerna, får man:

$$\frac{V_n}{\boldsymbol{U}_n}-\frac{V_{n+kr}}{\boldsymbol{U}_{n+kr}}=\frac{b^n\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_{n+r}}+\frac{b^{n+r}\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_{n+r}\boldsymbol{U}_{n+2r}}+\ \ldots\ +\frac{b^{n+(k-1)r}\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_{n+(k-1)r}\boldsymbol{U}_{n+kr}}.$$

Låter man k gå mot oändligheten, blir då:

$$\frac{\delta}{2}=\frac{V_n}{\boldsymbol{U}_n}-\frac{b^n\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_{n+r}}-\frac{b^{n+r}\boldsymbol{U}_r}{\boldsymbol{U}_{n+r}\boldsymbol{U}_{n+2r}}-\ \ldots\ \ .\ \ . \qquad (62)$$

Vill man t. ex. beräkna $\sqrt{2}$, kan man sätta $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$, då man får $\delta=2\sqrt{2}$, $2a=2$, $b=-1$. Talen $\boldsymbol{U}_n$ och V_n finna vi då uträknade i ex. IV, sid. 15. Sättes i (62) t. ex. $n=12$ och $r=8$, så är den andra termen $<10^{-8}$ och (då $\boldsymbol{U}_{28}=2V_{14}\boldsymbol{U}_{14}>10^{10}$) den tredje termen $<10^{-14}$. Medtages blott första termen, får man alltså 7 korrekta decimaler, med-

tagas de två första termerna får man 13 korrekta decimaler. Man finner sålunda:

$$\sqrt{2} = \frac{19\,601}{13\,860} - \frac{408}{13\,860 \cdot 15\,994\,428} - \ldots =$$
$$= 1{,}41'421356'421356 - 0{,}00000000184046 = 1{,}41421356237331.$$

*

Fermats serier $U_n = 2^n - 1$ och $2V_n = 2^n + 1$ (ex. I, sid. 15) ha varit föremål för livligt intresse, och det har nedlagts ett oerhört arbete på frågan om vilka av dessa tal, som äro primtal.

Redan Euklides hade visat (IX. 36), att när $U_n = 2^n - 1$ är ett primtal, så är $2^{n-1}(2^n - 1)$ ett *fullkomligt tal*, d. v. s. ett sådant tal, som är = summan av dess samtliga divisorer (talet självt undantaget), t. ex. $6 = 1+2+3$; $28 = 1+2+4+7+14$, o. s. v. Det nödvändiga villkoret för att $U_n = 2^n - 1$ skall vara ett primtal är (sats 5, följds. 4), att *n är ett primtal.* Hittills ha blott 9 sådana primtal U_n kunnat påvisas, nämligen för $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61$. Talet $2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$ är för övrigt det största kända primtalet.

Att pröva, om $2^n - 1$ är ett primtal, genom att dividera detta tal med *alla* primtal $< \sqrt{2^n - 1}$, skulle redan vid rätt små n-värden bli mycket tidsödande, och därför har följande utgallring bland dessa varit av stort värde.

Om man antager, att $U_n = 2^n - 1$ är delbart med ett *primtal* p, så är p gemensam faktor till U_n och U_{p-1}, ty enligt Fermats sats[1] är $U_{p-1} = 2^{p-1} - 1$ delbart med p. Då måste (sats 5, följds. 2) n och $p - 1$ också ha en gemensam faktor, och som n är ett primtal, så måste denna gemensamma faktor vara n, och då $p - 1$ är ett jämnt tal, så måste alltså n vara faktor i $\frac{p-1}{2}$, d. v. s. $\frac{p-1}{2} = kn$, och alltså är $p = 2kn + 1$. Man behöver alltså pröva, om $2^n - 1$ är delbart endast med de primtal $< \sqrt{2^n - 1} < 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$, som äro av formen $2kn + 1$.

[1] Bevis för Fermats sats, se årg. 3, sid. 185.

Om man t. ex. vill undersöka, om $2^{11}-1=2047$ är ett primtal, ser man efter, vilka av talen $22k+1$ äro primtal $< 2^6-1=63$, och finner då, att endast ett sådant existerar, nämligen 23. Om alltså 2 047 ej är ett primtal, så måste det vara delbart med 23, vilket också är fallet.

Frågan om delbarheten av talen $2V_n=2^n+1$ fick ökat intresse, då Gauss visade, att om ett sådant tal är ett primtal, så kan cirkelns periferi delas i detta antal lika delar medelst passare och linjal.

För att $2V_n=2^n+1$ skall vara ett primtal är det nödvändiga villkoret (sats 7, följds. 3), att n är en dignitet av 2, d. v. s. $n=2^\nu (\nu=0, 1, 2, \ldots)$. Av dessa tal äro $2^1+1=3$; $2^2+1=5$; $2^4+1=17$; $2^8+1=257$; $2^{16}+1=65\,537$ primtal, och därför ansåg Fermat, att alla tal $2^{2^\nu}+1$ äro primtal, ehuru, som han skriver till en vän, »Je n'en ai pas la démonstration exacte».

Undersökningen av dessa tals delbarhet har underlättats på liknande sätt som i fråga om talen 2^n-1. Är $2V_n=2^n+1$ (där $n=2^\nu$) delbart med ett *primtal* p, så gäller detsamma om $\boldsymbol{U}_{2n}=2V_n\boldsymbol{U}_n$ och om $\boldsymbol{U}_{p-1}$ (enligt Fermats sats). Då nu $\boldsymbol{U}_{2n}$ och $\boldsymbol{U}_{p-1}$ ha en gemensam faktor p, så måste (sats 5, följds. 2) $2n$ och $p-1$ ha en största gemensamma faktor d, och p måste (sats 5) vara faktor i $\boldsymbol{U}_d$. Emedan $2n=2\cdot 2^\nu=2^{\nu+1}$, så måste d vara $=2^\mu$, där $\mu \leqq \nu+1$. Vore $\mu < \nu+1$, och alltså $\mu \leqq \nu$, så skulle $n=2^\nu$ vara jämnt delbart med $d=2^\mu$, och alltså $\boldsymbol{U}_n$ vara delbart med $\boldsymbol{U}_d$ (sats 4), varav följer att p skulle vara faktor i $\boldsymbol{U}_n$ och alltså gemensam faktor till $2V_n$ och $\boldsymbol{U}_n$, vilket är orimligt (sats 3). Alltså är $\mu=\nu+1$ och $d=2^\mu=2^{\nu+1}=2n$, varav följer att $2n$ är divisor till $p-1$, d. v. s. $p-1=2kn$ $\because$ $p=2kn+1$. Man behöver alltså pröva, om 2^n+1 är delbart endast med de primtal $< \sqrt{2^n+1} < 2^{\frac{n}{2}}+1$, som ha formen $2kn+1$.

För att undersöka om $2^{32}+1=4\,294\,967\,297$ är ett primtal divideras det med de primtal av formen $64k+1$, som äro $< 2^{16}+1$. Genom att sålunda pröva med talen 193; 257; 449; 577; 641 fann Euler, att $2^{32}+1=641\cdot 6\,700\,417$, och därmed var Fermats ovannämnda förmodan vederlagd.

Den elektriska ljusbågens teori.

Av HELGE STOLT.

I den av Rudberg utgivna nya upplagan av Molls lärobok i fysik för reallinjen finnes intagen en kort redogörelse för huvuddragen av den gängse teorien för den elektriska ljusbågen. Då jag[1] kommit att ägna denna teori en kritisk granskning och därvid påvisat, att de försök — bl. a. de i läroboken i fråga anförda — som skola visa, att en hög katodtemperatur är en grundbetingelse för ljusbågen, icke kunna tjäna som bevis för detta påstående, torde en redogörelse för en del av mina resultat här vara motiverad.

Man är ense om att elektronalstringen från katoden är en grundbetingelse för den jonteoretiska förklaringen av ljusbågen. Flera olika åsikter hava framställts om orsaken till denna elektronalstring. De flesta forskare hylla den, som först (1903) förfäktades av J. Stark och J. J. Thomson, nämligen att de alstrade elektronerna äro av glödelektrisk natur, och denna åsikt återfinnes vanligen i de sista decenniernas framställningar av bågens teori.

De experimentella bevis, som bruka anföras för åsiktens riktighet, avse att ådagalägga, att en hög katodtemperatur är nödvändig för bågens existens. De bägge experiment, som anges i Molls lärobok och som först blivit utförda av Stark och Cassuto (1903), äro de som oftast bruka omnämnas.

Försöket med tvenne kolstavar är en förenkling av Starks och Cassutos anordning. Dessa funno, att en ljusbåge erhölls mellan en kolstav som katod och en roterande cylinder

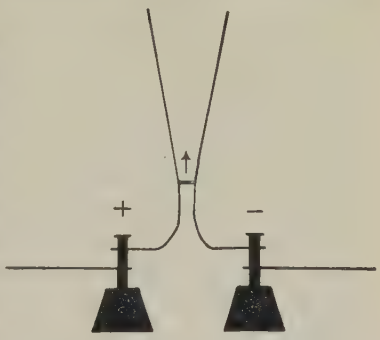
[1] H. Stolt: Über den im radialen Magnetfeld rotierenden Lichtbogen und über die Temperaturverhältnisse auf der Kathode eines Lichtbogens, gr.-avh., Ups. 1925.

av kol eller mässing som anod, men däremot ej, då den roterande cylindern var katod och kolstaven anod. Härav drogo de slutsatsen, att bågens ansatsyta på katoden ej kan förflyttas från ett ställe med högre temperatur till ett med lägre.

Flera försök, som utförts med s. k. roterande ljusbåge, en båge, vars bägge ansatsytor förflytta sig på elektroderna med en ofta mycket stor hastighet — vid kvicksilverelektroder är en hastighet av 650 m/sek. iakttagen — visa emellertid, att denna slutsats är förhastad. Dessa ha dock ej beaktats. Vid undersökningar över en mellan ändytorna av cylindriska elektroder alstrad båge, som roterade i ett radiellt magnetiskt fält, iakttog jag, att en polerad jämn elektrodyta var en nödvändig förutsättning för en hastig förflyttning och att katoder av kol och aluminium blott tillåto en långsam rörelse hos bågens ansatsyta. Den slutsatsen låg då nära, att en båge kunde erhållas med den av Stark och Cassuto använda anordningen, om den roterande katoden polerades väl och gjordes av koppar, silver eller guld, vilka metaller visat sig användbara vid den roterande bågen. En på en axel vinkelrätt fäst blankpolerad kopparskiva visade sig också kunna tjänstgöra som katod för en stabilt brinnande båge ännu vid en rotationshastighet, som motsvarade en linjär förflyttning av ansatsytan av 6 m/sek., och inga tecken tydde på att en ännu större hastighet skulle omöjliggöra bågen. Även om en mässingsskiva användes som roterande katod, erhölls en båge, som dock ej brann så stabilt som den förra. Att Stark och Cassuto misslyckats med mässing, torde ha berott på att de tände bågen, innan rotationen började, och att den sedan fastnade vid de ojämnheter, som uppkommit på katoden. Med en roterande aluminiumskiva som katod erhölls däremot ingen stabil båge, och samma resultat skulle ha erhållits med en kolskiva.

Man kan också med enkla medel övertyga sig om att en förflyttning av den negativa ansatsytan är möjlig. Användes vid det i Molls lärobok beskrivna försöket i

stället för två kolstavar tvenne grova koppartrådar, finner man, att bågens ansatsyta på såväl anod som katod kan förflytta sig. Man kan också fästa koppartrådar i ett par Holzska klämmare på det sätt figuren visar. Har man en spänning av 220 volt och tänder en båge mellan trådarna, vandrar denna bl. a. på grund av elektrodynamisk verkan uppåt och slocknar slutligen, då elektrodavståndet ej kan överstiga ett visst värde. En dylik anordning har funnit användning som åskledare vid kraftledningar (Hörnerblitzableiter). Vill man visa, att en snabb förflyttning av den negativa ansatsytan är möjlig, väljes till katod en blankpolerad kopparplåt, över vilken man sedan kan föra en anod, som utgöres av t. ex. en tjock, vinkelrätt avskuren koppartråd, vilken fästes vid en större kork, så att ett konstant elektrodavstånd erhålles. Genom att luta på korken tänder man bågen genom kontakt, medan anoden hålles i rörelse.



Som förut nämnts, är också det andra av de i Molls lärobok anförda experimenten först utfört av Stark och Cassuto. De arbetade dels med 430 och dels med 1860 volts spänning och funno, att en koncentrerad zinksulfatlösning väl kunde tjänstgöra som anod men däremot aldrig som katod. Då elektrolyten var katod, erhölls en glimurladdning, som ej kunde bringas att övergå i en bågurladdning. Härav drogo de slutsatsen, att en elektrolyt icke kunde utgöra katod vid en bågurladdning, emedan det ej var möjligt att åstadkomma den för elektrodalstringen vid katoden nödvändiga höga temperaturen.

Mot detta bevis för bågteoriens riktighet kunna flera befogade anmärkningar göras, bl. a. att ingen hänsyn tagits till tidigare undersökningar av urladdningar med elektrolytelektroder. Användes t. ex. 25-procentig svavelsyra som

katod och en helst smal metalltråd som anod, erhålles, om man har en strömkälla med liten spänning, endast elektrolytisk sönderdelning, då tråden kommer i beröring med vätskan. Vid högre spänning ($>$ 50 volt) däremot bildas, då tråden försiktigt föres mot vätskeytan, en lysande urladdning. Särskilt lätt erhålles detta resultat, om tråden förut är uppvärmd. Man kan föra ned tråden, som vanligen blir glödande, ett stycke i vätskan, utan att kontakt inträder, vilket visar, att man har att göra med ett slags Leidenfrostfenomen och att urladdningen försiggår i det ångskikt, som omger metalltråden.[1] Föres denna allt djupare ned, inträder slutligen explosionsartat kontakt och en kraftig elektrolytisk sönderdelning börjar.

Den omtalade urladdningen visar sig vid oscillografisk undersökning vara kontinuerlig, och då elektrodspänningen kan sjunka ned ända till 32 volt, kan det inte vara fråga om någon glimurladdning, emedan katodfallet mot svavelsyra i en sådan är bestämd till 423 volt. Urladdningen visar sålunda närmast analogi med en bågurladdning, vilket också framhållits av flera forskare. Visserligen är strömtätheten vid elektroderna tämligen liten, men en dylik låg strömtäthet har jag haft tillfälle iakttaga hos en båge vid lågt tryck.

Av det föregående framgår, att försöken med elektrolytkatoder ej kunna tjäna som bevis för den gängse bågteorien. Å andra sidan kunna dessa försök ej användas som avgörande bevis mot densamma, då man för närvarande ej med full bestämdhet kan påstå, att den erhållna urladdningen är en bågurladdning.

Man måste således återgå till de försök, där bågens ansatsyta på katoden förflyttar sig med en ofta mycket stor hastighet, och uppställa frågan: Kan trots hastigheten den på bågens ansatsyta förefintliga temperaturen vara till-

[1] Vid en del elektrolyter bliva förhållandena mera komplicerade. Så är bl. a. fallet med zinksulfat, där vid vissa spänningar en vätskedroppe bildas kring den som anod använda metalltråden och där urladdningen även sker mellan denna droppe och vätskan.

räcklig för en glödelektrisk elektronalstring? — Utförda spektroskopiska undersökningar ge intet stöd för en hög temperatur på elektrodytan, och beräkningar, som utförts för koppar- och silverelektroder, leda blott till en temperatur av några hundra grader.

En del forskare framhålla visserligen iakttagelser, som tyda på att ansatsytan ej skulle röra sig likformigt utan språngvis. Härigenom skulle beräkningarna kunna leda till högre temperaturer för vissa punkter på katodytan. Men då några sådana punkter ej kunna iakttagas vid den roterande bågen, och då det från dessa punkter skulle alstras flera elektroner per ytenhet än vad som är fallet i en båge, där ansatsytans temperatur bevisligen är mycket hög, synes mig denna förmodade lösning av frågan mycket osannolik.

Då det således finnes verkligt allvarliga svårigheter för den gängse teorien, har man att undersöka andra möjliga orsaker till elektronalstringen vid katoden. Det bör kanske i detta sammanhang framhållas, att någon grundväsentlig skillnad i huvudorsaken till elektronalstringen i olika slags bågar ej torde förefinnas.

Ett antagande, att elektronerna frigöras av de infallande positiva jonerna, har haft sina förespråkare. — En annan möjlighet är fotoelektrisk utlösning, som torde vara underlättad av att katodmaterialets spektrum utsändes från skikten närmast katoden. Därför talar, att detta spektrum alltid kunde iakttagas invid katoden vid de av mig studerade bågarna, vid vilka största svårigheten förefinnes för den vanliga teorien. Seeliger, som i »Einführung in die Physik der Gasentladung» lämnat den modernaste kritiska framställningen av bågurladdningen, har emellertid framhållit, att man vid punktljuslampan med volframelektroder har en båge, där ingen märkbar förgasning av elektroderna äger rum. Detta talar mot den fotoelektriska teorien.

Seeliger framhåller ännu en möjlighet. Beräkningar av den elektriska fältstyrkan vid katodytan leda till mycket höga värden av storleksordningen 10^5—10^6 volt/cm. För-

sök visa, att elektroner lösryckas ur katodmaterialet i dylika starka fält. Härigenom erhölles de för bågurladdningen nödvändiga elektronerna. Bindande experimentella bekräftelser på att dessa höga fältstyrkor förefinnas har man visserligen icke, men förskjutning och breddning av spektrallinjer, som iakttagas vid bågens katod, låta sig tyda som Starkeffekter, förorsakade av där förefintlig hög fältstyrka.

Det saknas således icke möjlighet för en förklaring av förhållandena vid katoden utan att antaga en glödelektrisk alstring av elektronerna. Tills nya undersökningar lämnat ytterligare bidrag till problemets belysning torde dock frågan om dess tillfredsställande lösning få lämnas öppen.

Den andra huvudsatsen i värmeläran.

Av HENRIK PETRINI.

I läroböckerna i fysik för läroverken saknas en framställning av värmelärans andra huvudsats; ja, i Molls lärobok i fysik finnes den ej ens omnämnd. Och dock måste denna sats sägas vara av den teoretiska betydelse, att den ovillkorligen bör ingå i den allmänbildning i fysik, som studentexamen är avsedd att giva. Med nutidens benägenhet att vid fysikundervisningen låta den tekniska sidan alltmer träda i förgrunden blir saknaden av denna fysiska grundlag vid fysikundervisningen ett hinder för den elementäraste uppfattning av energiens tillgodogörande.

Man torde mena, att den andra huvudsatsen är för svår och går över gymnasisternas horisont. Det visar sig dock, att man kan meddela den på ett så lättfattligt sätt, att den utan svårighet kan inhämtas av lärjungarna i andra realringen. Under hela min lärartid har jag alltid givit en framställning av andra huvudsatsen i samband med värmeläran, och det har aldrig visat sig, att denna lag skulle vara svårare för lärjungarna att fatta än andra fysikaliska lagar.

För att om möjligt bidraga till fyllandet av denna lucka i fysikundervisningen vill jag här nedan meddela, hur jag brukar gå till väga.

Inledning. I det följande skola vi inskränka oss till att behandla endast sådana kroppar, som utvidga sig vid uppvärmning, d. v. s. sådana som öka sin volym, när temperaturen stiger vid konstant tryck. Vidare antaga vi, att trycket per ytenhet är lika såväl över kroppens hela yta som inuti kroppen, såsom fallet är med vätskor och gaser i vila,

när man bortser från den olikhet i tryck, som orsakas av tyngdkraften. Om volymen ändras vid konstant temperatur, så ändras trycket på ett bestämt sätt, så att mot varje värde på volymen (v) svarar ett enda värde på trycket (p) per ytenhet.

Diagram. Man åskådliggör kroppens tillstånd genom att upprita ett diagram (fig. 1), där axlarna svara mot v och p. Är den absoluta temperaturen hos kroppen T, och antages denna konstant, så erhålles för varje v-värde ett däremot svarande värde på p. Den punkt (P) i diagrammet, vars koordinater äro v och p kallas för *den representativa punkten.* Är T konstant, beskriver den representativa punkten en kurva, när v ändras successivt från dess minsta till dess största värde. Denna kurva kallas *isoterm.* För olika värden på T erhållas olika isotermer.

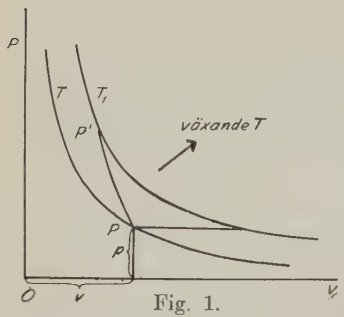


Fig. 1.

Isoterm. Enligt antagandet ökas volymen, när temperaturen ökas vid konstant tryck. Härav följer, att mot ett visst tryck och en viss volym svarar blott en temperatur, vadan *två isotermer ej kunna råka varandra*, och ju högre temperaturen är, desto längre bort från origo faller isotermen.

Adiabat. Om kroppens temperatur ändras så, att intet värme tillföres eller bortgår, beskriver den representativa punkten en kurva, som kallas *adiabat.* Erfarenheten visar, att om man (häftigt) sammanpressar en kropp adiabatiskt, så höjes temperaturen, vilket innebär, att om PP' är en adiabat, så ligger P' på en isoterm, där temperaturen T är högre än i P, ∵ *adiabaterna stupa brantare mot v-axeln än isotermerna.*

Det yttre arbetet (fig. 2). För att beräkna det yttre arbete, som en kropp uträttar, när dess volym ökas från v till $v+\delta v$, indela vi ytan i en mängd smådelar a. Det totala trycket på varje sådant ytelement är pa. Vid volymsök-

ningen har elementet förflyttats i normalens led stycket h; alltså blir det yttre arbete kroppen uträttar för varje ytelement $= pah$ och över hela ytan $= \Sigma' pah = p\Sigma' ah$, som är $= p\delta v = \delta S$ (fig. 3).

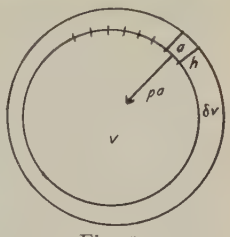


Fig. 2.

Om den representativa punkten rör sig från P_0 till P_1 (fig. 3) utefter en kurva vilken som helst, så erhålles det yttre arbetet S genom att dela in bågen P_0PP_1 i en mängd smådelar och beräkna arbetet δS för varje del. *Det totala yttre arbetet blir då* $S = \Sigma' \delta S =$ ytan $P_0P_1Q_1Q_0$.

Kretsprocess (fig. 4). Om den representativa punkten P beskriver en sluten kurva $P_0PP_1P'P_0$, säges kroppen hava

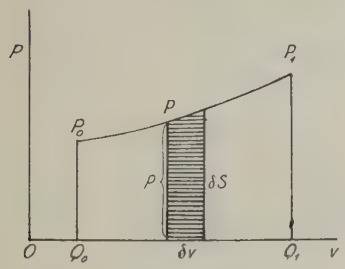


Fig. 3.

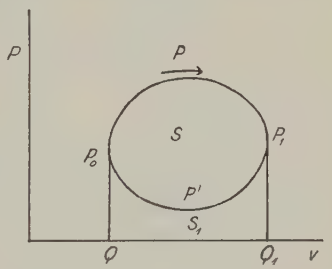


Fig. 4.

utfört en *kretsprocess*. Det yttre arbetet vid kretsprocessen är = arbetet under vägen P_0PP_1, minskat med arbetet under vägen $P_1P'P_0$, d. v. s. $(S+S_1) - -S_1 = S$, med andra ord *det yttre arbetet vid en kretsprocess är = den av den representativa punktens bana omslutna ytan.*

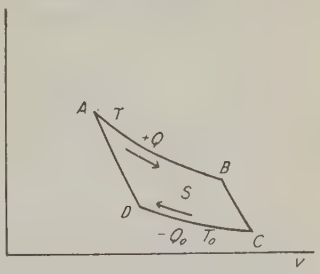


Fig. 5.

Carnot's kretsprocess, ABCDA (fig. 5), består av två isotermer AB (temperaturen $= T$) och CD (temperaturen $= T_0 < T$) och två adiabater BC och DA. Utefter AB mottager kroppen en värmemängd Q, och utefter CD avgiver kroppen en värme-

mängd Q_0. Det uträttade yttre arbetet S är då = ytan $ABCDA$. Enligt den första huvudsatsen är då $S = E(Q - Q_0)$, där E är värmets mekaniska ekvivalent.

Kroppen tänkes mottaga värmemängden Q från en värmekälla av i det närmaste samma temperatur T som kroppen — »*den högre värmekällan*» — och avge värmemängden Q_0 till en »*lägre värmekälla*» av temperaturen T_0. Kroppen säges beskriva den Carnot'ska kretsprocessen i direkt led.

Om nu kroppen beskriver samma process i motsatt led $ADCBA$, så upptager den samma värmemängd Q_0 från den lägre värmekällan, emedan denna har samma temperatur T_0 som kroppen. Av liknande skäl avges nu längs BA värmemängden Q till den högre värmekällan. Carnot's kretsprocess säges därför vara *reversibel* (omvändbar). I allmänhet säges en process vara omvändbar, om det *totala* sluttillståndet blir detsamma som begynnelsetillståndet, när processen försiggått en gång i ena riktningen och en gång i den motsatta.

Carnot's princip: Värme kan ej av sig självt övergå från en lägre värmekälla till en högre. Detta innebär, att en kropp icke kan genom en kretsprocess överföra värme från en lägre värmekälla till en högre utan att samtidigt konsumera arbete.

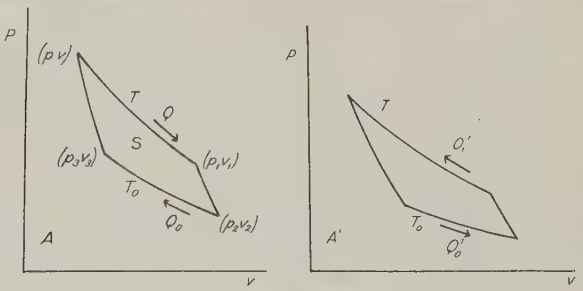


Fig. 6.

Andra huvudsatsen.

I. Antag nu, att två maskiner A och A' (fig. 6) arbeta efter var sin Carnot'ska kretsprocess, men mellan samma två värmekällor av temperaturerna T_0 och T. Sätt $S' = \frac{r}{s} S$

och koppla ihop maskinerna, så att A gör r varv, när A' gör s varv, och så, att de genomlöpa sina kretsprocesser i motsatta riktningar. När A har gått r varv i direkt led, har den tagit värmemängden rQ från den högre värmekällan, medan den andra maskinen har tillfört den högre värmekällan värmemängden sQ'. Under tiden har arbetet $rS - sS'$ uträttats. Enligt Carnot's princip kan då rQ ej vara $< sQ'$. Vändas båda maskinerna om, finner man på samma sätt, att rQ ej kan vara $> sQ'$; $\therefore\ rQ = sQ'$. Men $E(Q - Q_0) = S$, och $E(Q' - Q'_0) = S' = \frac{r}{s} S$; $\therefore\ rQ - rQ_0 = sQ' - sQ'_0$, $\therefore\ rQ_0 = sQ'_0$. Härav fås $\frac{Q}{Q_0} = \frac{Q'}{Q'_0} =$ ett tal α, som är oberoende av kroppens natur och endast beroende av temperaturerna T och T_0.

II. *Poisson's ekvation.* Man kan bevisa[1], att adiabatens ekvation för en ideell gas är $pv^n = \text{konst.}$, där $n = \frac{c_p}{c_v}$. Vidare är gasens inre energi endast beroende av temperaturen[2], så att den utefter en isoterm tillförda värmemängden är ekvivalent med det uträttade yttre arbetet. Av fig. 6 fås då, om den första kretsprocessen svarar mot en ideell gas:

$$p_1 v_1 = pv = RT;\quad p_2 v_2 = p_3 v_3 = RT_0;\quad pv^n = p_3 v_3^n;\quad p_1 v_1^n = p_2 v_2^n;$$

$$\therefore \frac{p_1 v_1^n}{pv^n} = \frac{p_2 v_2^n}{p_3 v_3^n},\ \textit{varav fås}\ \frac{v_1^{n-1}}{v^{n-1}} = \frac{v_2^{n-1}}{v_3^{n-1}},\ \therefore \frac{v_1}{v} = \frac{v_2}{v_3}$$

eller

$$\frac{v_1 - v}{v} = \frac{v_2 - v_3}{v_3};\ \therefore \frac{v_1 - v}{v_2 - v_3} = \frac{v}{v_3}.$$

Antagas adiabaterna ligga mycket nära varandra, så blir $EQ = p(v_1 - v)$, $EQ_0 = p_3(v_2 - v_3)$;

$$\therefore \alpha = \frac{Q}{Q_0} = \frac{p(v_1 - v)}{p_3(v_2 - v_3)} = \frac{pv}{p_3 v_3} = \frac{T}{T_0};\ \therefore \frac{Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}.$$

[1] Detta bevis, som här utelämnas, har jag stundom meddelat i skolan, när tiden det medgivit.

[2] Denna årgång, sid. 81.

Av I följer således, att *för alla kroppar är den utefter en isoterm tillförda värmemängden mellan två givna adiabater proportionell mot den absoluta temperaturen* (andra huvudsatsen).

Verkningsgrad. Förhållandet mellan den tillgodogjorda värmemängden och den av den högre värmekällan avgivna värmemängden kallas kretsprocessens verkningsgrad (η), $\because\ \eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = 1 - \frac{Q_0}{Q}$, $\because\ \eta = 1 - \frac{T_0}{T}$.

Entropi. Antag, att punkten P (fig. 7) rör sig från P_1 till P_2 utefter en godtycklig kurva. Denna indelas i en mängd smådelar. Genom ändpunkterna P och P' av en sådan liten del dragas adiabater och genom P en isoterm PP''. Om PP' är så liten, att triangelytan $PP''P'$ kan försummas, blir den utefter PP' tillförda värmemängden = den utefter isotermen PP'' tillförda värmemängden δQ. Nu är (II) $\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_0}{T_0}$, $\because\ \Sigma \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}$. Kvantiteten $\frac{Q_0}{T_0}$ representerar alltså läget av den adiabat, som går genom P_2 och kallas kroppens *entropi* i de punkter som ligga på denna adiabat.

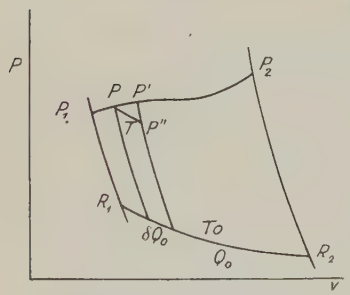


Fig. 7.

Clausius-Clapeyron's formel. Man har $\frac{Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q - Q_0}{T - T_0} = \frac{\frac{1}{E} \cdot S}{T - T_0}$. $\because\ Q = \frac{T}{E} \cdot \frac{S}{T - T_0}$. Om isotermerna ligga mycket nära varandra, så är $T - T_0$ mycket litet och betecknas då lämpligen med δT. Skriver man likaså δS i stället för S, så fås $Q = \frac{T}{E} \cdot \frac{\delta S}{\delta T}$. Vid ångbildning är Q = ångbildningsvärmet λ, om kroppens massa är = 1. Vidare äro isotermerna (fig. 8) parallella med v-axeln; $\because\ \delta S = (V - v)\,\delta p$, där V och v äro volymerna av massenheten ånga och vätska

resp. $\because \lambda = \frac{T}{E}(V-v)\frac{\delta p}{\delta T}$. Tages δp mellan 99° och 101° fås med läroböckernas och skoltabellernas siffror

$$\lambda = \frac{373}{4\,280} \cdot \frac{373}{273 \cdot 0{,}000\,804} \cdot \frac{(787{,}7 - 733{,}2)\,13{,}6}{2 \cdot 100} = 549$$

i stället för 538, d. v. s. 2 % för högt, vilket kan anses som en tillräckligt god överensstämmelse.

Icke-reversibla processer. Formeln $\frac{Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}$ (den andra huvudsatsen) är bevisad under antagandet, att värmemängden Q tillförts kroppen från en värmekälla av samma temperatur T. Men det är tydligt, att den värmemängd, som måste tillföras kroppen, för att den skall ändra sig på ett visst sätt (i detta fall isotermt), är alldeles oberoende av varifrån den kommer. Antag nu, att den kommer från en värmekälla av en högre temperatur $T'\,(T < T')$. Då hade man kunnat låta kroppen arbeta efter en annan isoterm, T' i stället för T, och då hade verkningsgraden blivit $\eta' = 1 - \frac{T_0}{T'}$, $\because \eta' > \eta$. På samma sätt förhåller det sig med den lägre värmekällan. Härav inses, att *verkningsgraden blir den största möjliga, när kretsprocessen är reversibel.* Den högsta verkningsgraden för en värmemotor, som arbetar mellan två värmekällor, ernås alltså av den, som utför en Carnot's kretsprocess.

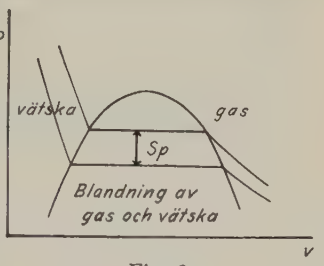


Fig. 8.

Hur en ny metod att härleda spegel- och linsformlerna tillämpas vid praktisk problemlösning.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Föreliggande uppsats anknyter omedelbart till min i denna tidskrifts senaste häfte[1] publicerade *Spegel- och linsformlernas härledning* och innehåller således den däri utlovade behandlingen av några typiska studentproblem.

Början må göras med den uppgift, som varit impulsen till att hela denna metodiska fråga upptagits till utredning.

Uppgift 1 (v. t. 1927): Var skall ett reellt föremål placeras på axeln till en tunn, bikonvex lins med radierna 5

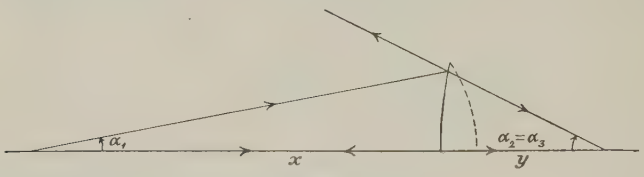


Fig. 1.

och 30 cm, för att den bild, som uppstår genom enbart spegling i närmast liggande linsyta, skall bliva belägen på samma ställe som den bild, vilken uppkommer genom brytning i linsen? Glasets brytningsexponent är 1,5.

α_1, $\delta_2 > 0$; α_2, $\delta_1 < 0$. Föremålets avstånd från linsen är x cm, bildens y cm.

1:o) $r_1 = -30$, $r_2 = 5$.

Formlerna (1) och (6_1) ge med ledning av fig. 1 ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{2}{30} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0{,}5\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{30}\right) = \dfrac{7}{60} \end{cases}$$

[1] Årg. XI, h. 3, sid. 152—163. I denna uppsats sid. 162, rad 5 nedifrån står $\frac{1}{a}$, läs $-\frac{1}{a}$.

som efter eliminering av $\frac{1}{y}$ övergår till $\frac{2}{x}=\frac{1}{20}$ eller $x=40$ och $y=\frac{120}{11}$.

2:o) $r_1=5$, $r_2=30$.

Man får nu

$$\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{60}\end{cases}$$

d. v. s.

$$\frac{2}{x}=-\frac{17}{60}$$

en orimlig ekvation, emedan x, som betecknar ett avstånd, följaktligen enligt vår allmänna förutsättning ej kan vara negativt.

Föremålet skall således placeras 40 cm framför den minst buktiga linsytan.

Uppgift 2 (v. t. 1923): På botten av ett tomt kärl ligger en konkav sfärisk spegel med liten öppning och med den speglande ytan uppåt. Rakt ovanför densamma på den vertikala optiska huvudaxeln finnes ett litet lysande föremål, vars avstånd från spegelns mittpunkt är 15 cm. Spegelns radie är 20 cm. Vart förflyttas bilden av detta föremål, om i kärlet hälles vatten, så att vattenytan når 20 cm över spegelns mittpunkt? Vattnets brytningsexponent är $\frac{4}{3}$.

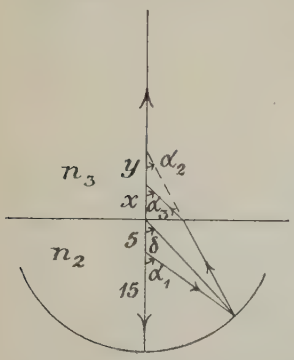


Fig. 2.

α_1, α_2, α_3, $\delta>0$; $\delta_2=0$; $n_2=\frac{4}{3}$, $n_3=1$. Bilden sänkes y cm till en punkt, belägen x cm ovan vattenytan. Formler: $\alpha_1+\alpha_2=2\delta$, $n_2\alpha_2-n_3\alpha_3=(n_2-n_3)\delta_2$. Dessa formler, som motsvara (1) och (3), giva med ledning av fig. 2 ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{x+y+20} = \dfrac{2}{20} \\ \dfrac{4}{3(x+y)} - \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

vars första ekvation ger $x+y=10$, som, insatt i den andra, leder till $x=7{,}5$ och $y=2{,}5$. Bilden flyttas således till en punkt 7,5 cm ovan vattenytan.

Uppgift 3 (h. t. 1895): En smal glasstång, som till en del är nedstucken i en vätska, är i sin övre ända avskuren med ett vinkelrätt plan och i den nedre begränsad av en utåt buktig sfärisk yta, vars radie är 2 cm och vars centrum ligger på stångens axel. Mot den plana ytan infalla ljusstrålar parallella med axeln. Bestäm strålarnas riktning efter gången genom glasstången, då brytningsexponenten från luft till glaset är 1,5, från luft till vätskan 1,6. $\alpha_1=0$; α_2, $\delta>0$; $n_1=1{,}5$, $n_2=1{,}6$. Bildknippets divergenspunkt ligger x cm från stångens buktiga ända. Formeln (3) ger med ledning av fig. 3 ekv.

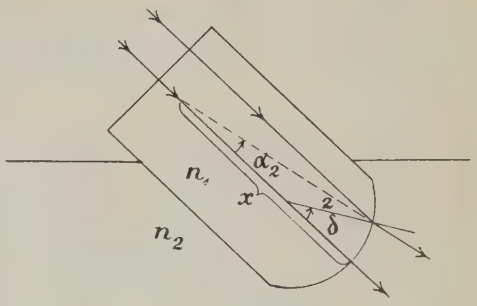


Fig. 3.

$$-\frac{1{,}6}{x} = (1{,}5 - 1{,}6)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{0{,}1}{2}$$

varav $x=32$.

Strålarna få således efter passagen genom glasstången en sådan riktning, att de tyckas utgå från en punkt på stångens axel, belägen 32 cm från stångens buktiga ända.

Uppgift 4 (v. t. 1922): På ett 12 cm djupt, med vatten helt fyllt provrör lägges en tunn, plankonvex lins så, att den undre, plana linsytan sammanfaller med vätskeytan. Den konvexa linsytans radie är 4 cm och glasets brytningsindex $\frac{3}{2}$. Var faller bilden av ett föremål, placerat på provrörets botten? Vattnets brytningsindex är $\frac{4}{3}$.

$\alpha_1, \delta_2 > 0$; $\delta_1 = 0$; $\alpha_3 < 0$; $n_1 = \frac{4}{3}$, $n_2 = \frac{3}{2}$, $n_3 = 1$. Bilden faller x cm ovan linsen. Formel (6): $n_1\alpha_1 - n_3\alpha_3 = (n_1 - n_2)\delta_1 + (n_2 - n_3)\delta_2$ ger med ledning av fig. 4 ekv.

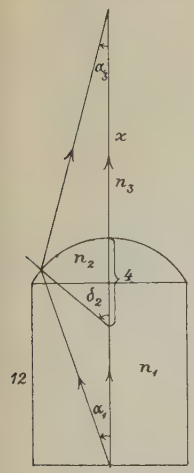


Fig. 4.

$$\frac{1}{3 \cdot 12} + \frac{1}{x} = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{4}$$

varav

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$$

eller

$$x = 72.$$

Bilden uppkommer således 72 cm ovan linsen eller 84 cm ovan föremålet.

Uppgift 5 (h. t. 1919): I en bägare har man ifyllt kolsvavla till en höjd av 10 cm och däröver vatten till samma höjd. Hur mycket upplyftad synes bägarens botten för ett öga, som ser lodrätt nedåt? Brytningsexponenten från luft till kolsvavla är $\frac{5}{3}$ och från luft till vatten $\frac{4}{3}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$; $\delta_1 = \delta_2 = 0$; $n_1 = \frac{5}{3}$, $n_2 = \frac{4}{3}$, $n_3 = 1$. Efter första brytningen tyckes botten upplyftad $10 - y$ cm, efter andra brytningen $20 - x$ cm. Formelsystemet (5):

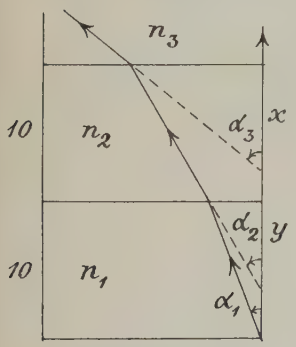


Fig. 5.

$$\begin{cases} n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = (n_1 - n_2)\delta_1 \\ n_2\alpha_2 - n_3\alpha_3 = (n_2 - n_3)\delta_2 \end{cases}$$

ger med ledning av fig. 5 ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3 \cdot 10} - \dfrac{4}{3y} = 0 \\ \dfrac{4}{3(y+10)} - \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

varav $y = 8$ och $x = 13{,}5$ eller $20 - x = 6{,}5$. Bägarens botten synes således upplyftad 6,5 cm.

Uppgift 6 (v. t. 1913): En kamera, avsedd att användas vid fotografering i vatten, är för detta ändamål gjord vattentät,

så att den vid nedsänkning i vatten förblir inuti fylld med luft. Kamerans objektiv är en tunn, bikonvex lins, vars båda ytor ha lika stora radier. Huru stor är brännvidden ini kameran, då denna är nedsänkt i vatten, i förhållande till brännvidden, då kameran befinner sig uppe i luften? Brytningsindex från luft till vatten är $\frac{4}{3}$, från luft till glas $\frac{3}{2}$.

$\delta_2 > 0$; $\alpha_1 = 0$; α_3, $\delta_1 < 0$; $n_1 = \frac{4}{3}$, $n_2 = \frac{3}{2}$, $n_3 = 1$. Brännvidden är i det förra fallet xf, i det senare f. Vardera linsytans radie är r. Formlerna (6) och (6_1) ge med ledning av fig. 6 ekvationssystemet

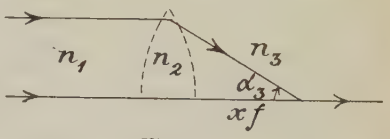


Fig. 6.

$$\begin{cases} \frac{1}{xf} = -\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{r} + \left(\frac{3}{2} - 1\right)\cdot\frac{1}{r} = \frac{2}{3r} \\ \frac{1}{f} = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \end{cases}$$

varav fås $x = \frac{3}{2}$.

Brännvidden blir således en och en halv gång så stor med kameran i vattnet som i luften.

Uppgift 7 (v. t. 1919): Ett kameraobjektiv skall bestå av två tunna, lika, positiva linser. Vardera linsens brännvidd är 20 cm. Huru stort skall avståndet mellan linserna vara, för att en skarp bild av föremålet, som anses ligga på oändligt avstånd, skall falla på plåten, om dennas avstånd från närmaste lins skall vara 9 cm?

α_1, $\alpha_3 < 0$. Det sökta avståndet är x cm. Tillämpas

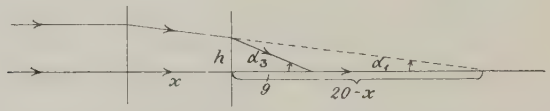


Fig. 7.

formel (6_1) på högra linsen i fig. 7, erhålles (då man observerar, att för $\alpha_1 = 0$ måste $-\alpha_3 = \frac{h}{20}$) ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{h}{20} = (n-1)(\delta_2 - \delta_1) \\ -\dfrac{h}{20-x} + \dfrac{h}{9} = (n-1)(\delta_2 - \delta_1) \end{cases}$$

varav fås $$\frac{1}{20-x} = \frac{1}{9} - \frac{1}{20} = \frac{11}{180}$$

eller $$20 - x = 16\tfrac{4}{11} \text{ och } x = 3\tfrac{7}{11}.$$

Avståndet mellan linserna skall således vara $3\frac{7}{11}$ cm.

Uppgift 8 (h. t. 1915): I ett glaskärl, vari två motstående väggar utgöras av plana, tunna, inbördes parallella glasplattor, nedsättes en tunn positiv lins, vars fokaldistans är 11 cm, med sin optiska axel vinkelrät mot dessa väggar och utan att beröra dem. Väggarnas inbördes avstånd är dock så litet, att det kan försummas. På en skärm i linsens fokalplan avbildas skarpt ett avlägset föremål. Om kärlet fylles med vatten, måste skärmen flyttas 20,4 cm längre bort från linsen längs optiska huvudaxeln, för att bilden åter skall bliva tydlig. Om kärlet fylles med bensin i stället för med vatten, blir motsvarande förflyttning 36,2 cm. Om vattnets brytningsindex är 1,333, vad är då bensinens?

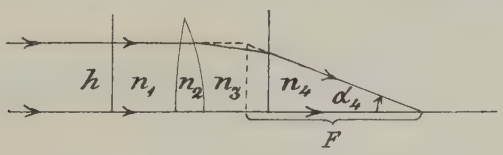


Fig. 8.

$$\alpha_1 = \delta_3 = 0;\ \alpha_4 = -\frac{h}{F},\ \delta_1 = -\frac{h}{r_1},\ \delta_2 = \frac{h}{r_2};\ n_3 = n_1,\ n_4 = 1.$$

Bensinens brytningsindex $= x$, det optiska systemets brännvid $= F$.

Enär brytning sker vid tre successiva gränsytor, ha vi att tre gånger tillämpa (3) och få alltså den mot (6) svarande formeln $n_1\alpha_1 - n_4\alpha_4 = (n_1 - n_2)\delta_1 + (n_2 - n_3)\delta_2 + (n_3 - n_4)\delta_3$, som på grund av ovanstående förenklas till

$$\frac{1}{F} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}$$ [1]

om f_2 och f_1 föreställa brännvidderna (i luft) för den i systemet ingående konvexa fasta linsen och en konkav vätskelins med lika stora radier som den fasta linsen.

Ur vår sista formel och problemets data framgår ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{1}{31{,}4} = \frac{1}{11} - 0{,}333\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \\ \frac{1}{47{,}2} = \frac{1}{11} - (x-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \end{cases}$$

varav fås

$$\frac{x-1}{0{,}333} = \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{47{,}2}\right) : \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{31{,}4}\right) = \frac{36{,}2 \cdot 31{,}4}{47{,}2 \cdot 20{,}4}$$

och slutligen $x = 1{,}393$.

Bensinens brytningsindex är således 1,393.

De valda studentproblemen torde tillräckligt klart ådagalägga metodens praktiska användbarhet och därmed dess överlägsenhet över den vanliga.

[1] Denna för den sammansatta linsen gällande fokalformel får icke utan vidare användas i detta problem, om densamma, såsom väl nästan alltid torde ske, härledes under den här falska förutsättningen, att de enkla linserna äro helt omgivna av luft, ehuru deras inbördes avstånd är så litet, att det kan försummas.

Det periodiska systemet och dess uppställning för undervisningsändamål.

Av FOLKE GUNNESON och HALVAR KHENNET.

Det av MENDELEJEFF uppställda periodiska systemet uppvisar som bekant en del oregelbundenheter. En av dessa är, att elementen på tre ställen måste tagas i annan ordning än den, som följer av deras atomvikter. Denna olägenhet kan ju numera anses fullständigt hävd, sedan man valt elementens av MOSELEY bestämda kärnladdningar (= deras ordningstal eller atomnummer) till grund för uppställningen. Dock kvarstå en del oregelbundenheter. De viktigaste äro:

1. Fe, Co, Ni och platinametallerna måste placeras utanför det övriga systemet i en särskild vertikalkolumn.

2. På grund av uppträdandet av de långa perioderna måste från och med koppar två grundämnen, som i verkligheten hava en ganska obetydlig likhet, placeras under varandra på samma ställe i vertikalkolumnerna, t. ex. K-Cu, Cr-Se, Mn-Br. Vad angår speciellt sådana egendomligheter i det Mendelejeff'ska schemat som Mn-Br, Cr-Se, må påpekas, att dessa metaller visa överensstämmelse med respektive metalloider endast på sina högsta valensstadier. Ville man vara konsekvent, borde Mn på tvåvärt stadium stå tillsammans med de tvåvärda metallerna Hg och Zn, på trevärt stadium tillsammans med Al o. s. v.

3. De sällsynta jordarterna kunna ej inrangeras i schemat.

En mera naturlig uppställning av schemat återfinnes i de på sista tiden utkomna handböckerna i fysik och i LANDOLT-BÖRNSTEIN-ROTH's fysikaliska tabellsamling. Detta schema kan sägas vara ett resultat av de senare årens atomteoretiska forskningar. Det bör emellertid påpekas, att det

till rätt väsentlig del bygger på en av dansken Julius Thomsen år 1895 publicerad uppställning.

Varje period har i tabell 1 erhållit en horisontalrad. Kemiskt och fysikaliskt närbesläktade element i de olika perioderna stå i samma vertikalrad. Vad vätet beträffar, bör det som positiv, envärd jon betraktat, stå ovanför alkalimetallerna. Men det finnes även skäl, som tala för vätets plats över halogenerna. I en del föreningar, t. ex.

Tabell 1.

1 H																1 H	2 He
3 Li											4 Be	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na											12 Mg	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 A
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Ma	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 J	54 X
55 Cs	56 Ba	57-71 *	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 —	86 Em
87 —	88 Ra	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U												

*														
57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 —	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Ds	67 Ho	68 Er	69 Tu	70 Yb	71 Cp

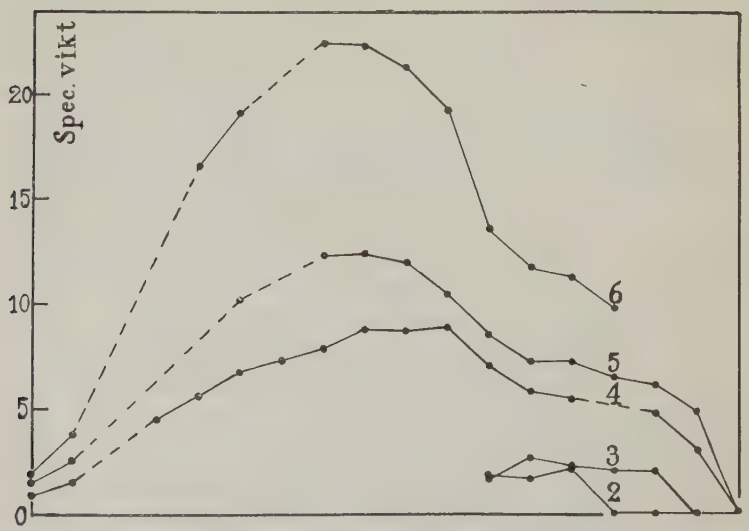


Fig. 1.

kolvätena, står det halogenerna närmast. Från fysikalisk synpunkt är väte en metalloid, då det i fast tillstånd ej har några metalliska egenskaper.

Att insätta de sällsynta jordarterna i tabellen skulle medföra, att denna i sidled bleve alltför utsträckt. Dessutom kan det vid den elementära undervisningen i fysik eller kemi ej vara av intresse att känna alla dessa element, vilkas egenskaper äro så föga skilda från varandra. Åt dessa element med atomnumren 57—71 är endast en ruta lämnad.

De senast tillkomna elementen äro 43 masurium, 75 rhenium och 72 hafnium. Dessa tre element hava upptäckts med hjälp av deras karakteristiska röntgenstrålning. Endast hafnium har framställts i rent tillstånd.

Fördelen ur kemisk synpunkt av denna tabelluppställning (fig. 1) framgår omedelbart. Metallerna avlägsnas från metalloiderna, Fe-Pt-grupperna få en naturlig ställning mellan Mn- och Cu-grupperna, Cu, Ag och Au skiljas från alkalimetallerna.

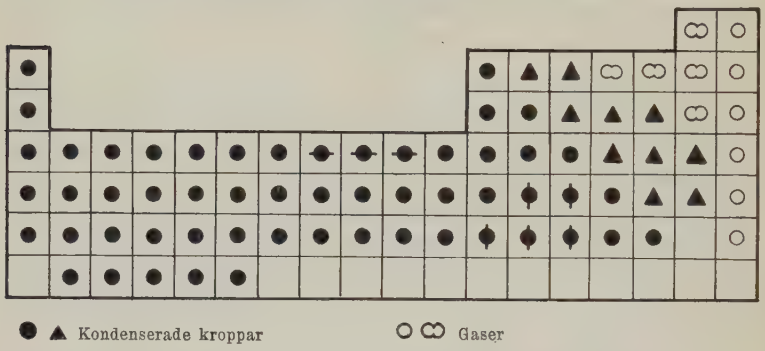
Ur kemisk synpunkt torde man kunna definiera en metall resp. en metalloid på följande sätt. En metall är ett ämne, vars hydroxid på det lägsta valensstadiet visar basisk karaktär; en metalloid är ett ämne, vars hydroxid på det lägsta valensstadiet visar sur karaktär. Ämnen, vilkas lägsta hydroxider äro amfolyter, stå i kemiskt hänseende på gränsen mellan metaller och metalloider. Lägger man denna synpunkt till grund för indelningen av grundämnena, så är det lätt att se, att i det nya schemat (tab. 1) metallerna komma att stå nedtill och till vänster om en linje, som drages från gränsen mellan Be och B ned till Bi.

Från fysikalisk synpunkt är denna uppställning mycket givande. Omedelbart under tabell 1 äro kurvor uppritade, vilka åskådliggöra specifika viktens variation inom perioderna 2—6. En del ämnens spec. vikter äro ej kända. I diagrammet utmärkes detta med streckade linjer. Som synes förlöpa samtliga kurvor på samma sätt.

Tab. 2 (jfr med tab. 1) giver en god översikt av det periodiska systemet. Alla metaller äro betecknade med

fyllda cirklar. De vid vanlig temperatur fasta eller flytande metalloiderna betecknas med fyllda trianglar. Enatomiga och tvåatomiga gaser igenkännas genom en resp. två ofyllda cirklar. De ferromagnetiska metallerna Fe, Co, Ni äro utmärkta med horisontella streck genom cirklarna.

Enligt undersökningar vid Leydens köldlaboratorium försvinner vid mycket låg temperatur, omkring 5° absolut



● ▲ Kondenserade kroppar ○ ∞ Gaser

Tabell 2.

temperatur, det ohmska motståndet för metallerna In, Sn, Hg, Tl och Pb. Dessa metaller, som benämnas supraledare, äro utmärkta med streck i vertikalled. Denna egenskap tillhör i tabellen närstående element.

I tab. 2 har väte placerats över halogenerna, vilket vid detta mera fysikaliskt än kemiskt betonade framställningssätt bör vara berättigat. Man vinner ju härigenom, att samtliga tvåatomiga gaser bliva placerade på ett ställe i figuren.

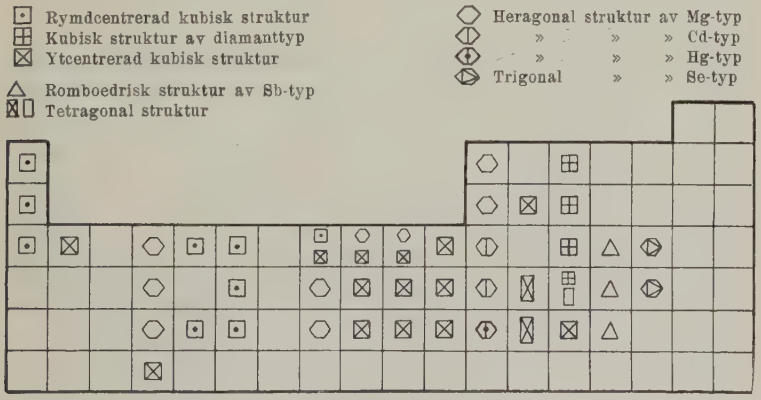
Om vi sedan se på de vid rumstemperatur fasta ämnenas magnetiska egenskaper (tab. 3), så finna vi, att de paramagnetiska (+) äro i huvudsak placerade i vänstra delen av tabellen och de diamagnetiska (—) i den högra. Olika forskare finna än paramagnetiska än diamagnetiska egenskaper hos ett och samma ämne. Detta får antagligen tillskrivas materialets olika renhetsgrad. I dessa fall ha i vederbörande ruta insatts båda tecknen.

Tab. 4 giver en sammanställning av elementens kristallstrukturer. En stor del av rutorna äro tomma, då upp-

gifter om dessa element saknas. Beteckningssätten för de olika kristallformerna äro hämtade ur en uppsats i *Kosmos* år 1923 av prof. Aminoff. Hos några element har

Tabell 3.

man funnit två kristallformer, vilka äro stabila inom olika temperaturområden. Man finner, att grundämnena inom ett stort antal vertikalrader hava samma struktur, så alkalimetallerna, grupperna Cu-Au, Be-Hg o. s. v.



Tabell 4.

Antalet element i de olika perioderna är 2, 8, 8, 18, 18, 32 och 6. Denna periodicitet framträder utom i spec. viktskurvorna även mycket vackert i den av Lothar Meyer givna kurvan över grundämnenas atomvolymer som funktion av atomvikten. Sommerfeld har påvisat, att om man

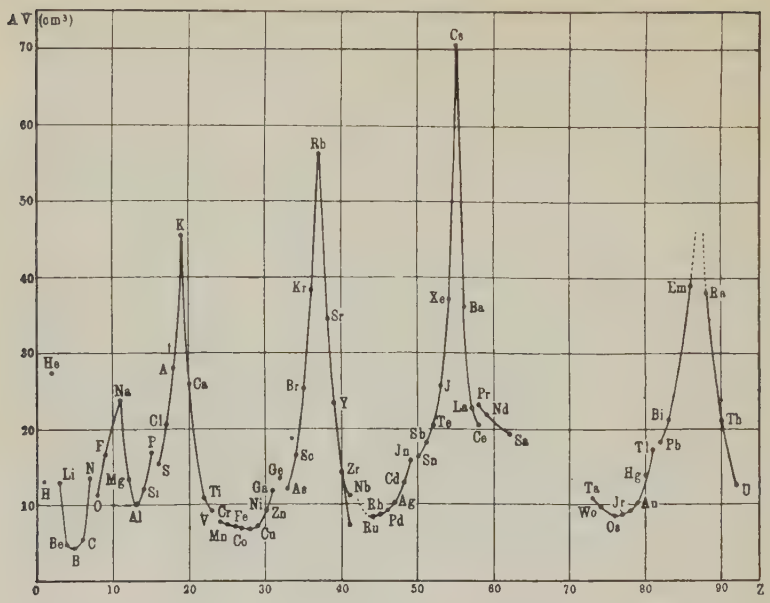


Fig. 2.

använder ordningstalet som abskissa i stället för atomvikten, utjämnas kurvan på en del ställen. Den i enlighet härmed uppritade kurvan är återgiven i fig. 2. Kurvan karakteriseras av branta maxima vid alkalimetallerna och flacka minima i periodernas mitt.

En hel del fysikaliska egenskaper visa mer eller tydligt samma periodicitet. I fig. 3 återgivas kurvor över kompressibilitet $\varkappa$ (I), utvidgningskoefficient α (II), och den reciproka smältpunkten $\frac{1}{T}$ (III). Hos två av kurvorna återfinnas även här höga maxima för alkalimetallerna. Hos kurvan för reciproka smältpunkterna utgöras maxima av ädelgaserna på grund av dessa ämnens låga smältpunkter.

Kurvor över den spec. elektriska ledningsförmågan och en del andra fysikaliska konstanter visa ej någon tydlig periodicitet. Detta beror på det sätt, varpå dessa konstanter definierats. Så är t. ex. ett ämnes elektriska lednings-

förmåga = ledningsförmågan hos en kub med 1 cm:s kantlinje. Sådana kuber av olika grundämnen kunna ej giva jämförbara värden på ledningsförmågan, eftersom de inne-

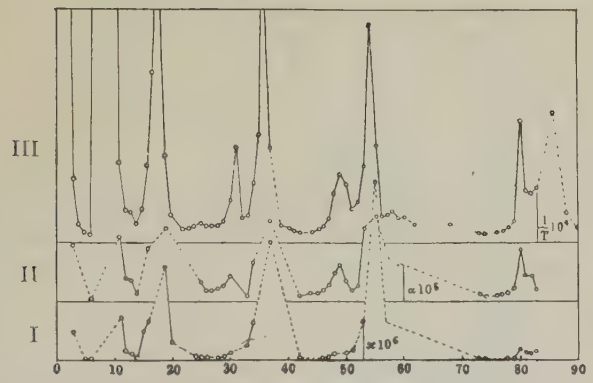


Fig. 3.

hålla olika antal atomer och detta antal med stor sannolikhet har inflytande på elektricitetsledningen.

I samband härmed kan nämnas, att det spec. värmet som funktion av ordningstalet ger en hyperbelliknande kurva, vilket ju står i samband med Dulong-Petit's lag.

Tabell 5.

Ordn.-tal	Symbol	Föreningsvikt	Atomvikter
1	H	1,008	1,008
2	He	4,00	4
3	Li	6,94	6b, 7a
4	Be	9,02	9
5	B	10,82	10b, 11a
6	C	12,00	12
7	N	14,008	14
8	O	16,000	16
9	F	19,00	19
10	Ne	20,2	20a, (21), 22b
11	Na	23,00	23
12	Mg	24,32	24a, 25b, 26c
13	Al	26,97	27

Ordn.-tal	Symbol	Föreningsvikt	Atomvikter
14	Si	28,06	28a, 29b, 30c
15	P	31,04	31
16	S	32,07	32a, 33c, 34b
17	Cl	35,457	35a, 37b
18	Ar	39,94	36b, *40*a
19	K	39,104	39a, 41b
20	Ca	40,07	*40*a, 44b
21	Sc	45,10	45
22	Ti	47,90	48, (50)
23	V	51,0	51
24	Cr	52,01	52
25	Mn	54,93	55
26	Fe	55,84	54b, 56a
27	Co	58,97	59
28	Ni	58,68	58a, 60b
29	Cu	63,57	63a, 65b
30	Zn	65,37	64a, 66b, 68c, *70*d
31	Ga	69,72	69a, 71b
32	Ge	72,60	*70*c, 72b, *74*a
33	As	74,96	75
34	Se	79,2	*74*f, 76c, 77e, 78b, *80*a, *82*d
35	Br	79,92	79a, 81b
36	Kr	82,9	78f, *80*e, *82*c, 83d, 84a, *86*b
37	Rb	85,5	85a, 87b
38	Sr	87,6	*86*b, 88a
39	Y	88,93	89
40	Zr	91,2	90a, 92c, 94b, (96)
47	Ag	107,88	107a, 109b
48	Cd	112,4	110c, 111e, *112*b, 113d, *114*a, *116*f
49	In	114,8	*115*
50	Sn	118,7	*112*, *114*, *115*, *116*c, 117f, 118b, 119e, 120a, *121*h, 122g, 124d
51	Sb	121,8	*121*a, 123b
52	Te	127,5	*126*b, *128*a, *130*a
53	J	126,92	127
54	X	130,2	124, *126*, *128*, 129a, *130*, 131c, 132b, 134d, *136*e
55	Cs	132,8	133
56	Ba	137,4	(*136*), 138
57	La	138,9	139
58	Ce	140,2	140a, *142*b

Ordn.-tal	Symbol	Föreningsvikt	Atomvikter
59	Pr	140,9	141
60	Nd	144,3	*142*, 144, (145), 146
80	Hg	200,6	196g, 198d, 199c, 200b, 201e, 202a, 204f
83	Bi	209,0	209

De i tabell 1 angivna elementen äro kemiskt enhetliga individer, d. v. s. de kunna ej med kemiska hjälpmedel ytterligare uppdelas. Detta faktum höll man länge för ett bevis, att de kemiska grundämnena blott bestå av ett enda atomslag. Att denna slutsats ej var riktig, framgick först genom upptäckten av de isotopa radioaktiva grundämnena. Att även inaktiva element ofta bestå av flera atomslag, påvisades först av J. J. Thomson, senare av F. W. Aston med hjälp av hans mass-spektrograf. I tabell 5 äro de hittills undersökta grundämnenas isotoper införda, som vanligt ordnade efter stigande atomvikt. Bokstaven a efter atomvikten anger den isotop, som förekommer rikligast, b den därpå följande o. s. v. Parentesen anger, att förekomsten av denna isotop ej är säkert konstaterad. Isobara atomslag, d. v. s. atomer av olika grundämnen med lika massor, äro tryckta med kursiv stil. Man ser, att isobarer i allmänhet förekomma endast hos element med jämna atomnummer, och att endast 2 atomer av skilda element kunna vara isobarer.

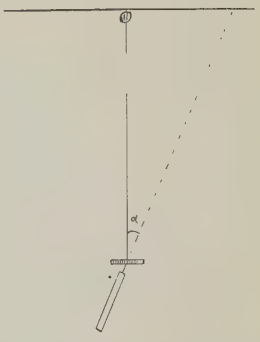
Till prof. Borelius bedja vi att få framföra vårt varma tack för de goda råd vi erhållit vid artikelns utarbetande.

Enkel anordning för våglängdsbestämning med gitter.

Av K. A. WINGÄRDH.

Vid laborationer i tredje realringen har jag låtit några av de mera försigkomna eleverna bestämma våglängder för väte-, neon- och heliumlinjer enligt följande enkla anordning.

Tätt framför 0-punkten på en c:a 3 m lång skala (0-punkten mitt på skalan) är placerat ett geisslerrör innehållande väte eller en glimlampa, s. k. bokstavslampa (K) med elektrodernas kant vänd mot observatören, varvid en kraftigt lysande lodrät linje erhålles. 3 m från densamma uppställes ett gitter (570 linjer per mm) med linjerna vertikala. Medelst en kikare betraktar man nu genom gittret de båda spektra, ett på vardera sidan (se fig). Linjernas lägen på skalan antecknas. För att man samtidigt skall kunna se både spektrallinjerna och skalstrecken, belyses skalan med en glimlampa.



Ur avläsningen på skalan och avståndet 3 m beräknas böjningsvinkeln α, varur sedan på vanligt sätt λ kan beräknas. Som exempel på noggrannheten kunna följande serier anföras:

Glimlampa.

Obs. värde	Tabellvärde[1]
0,000449	0,0004471 He
504	5048 »
588	5852 Ne
590	5876 He
596	5945 Ne
617	6164 »
628	6267 »
637	6383 »
644	6402 »

Väte.

Obs. värde	Tabellvärde
0,000414	0,0004102
488	4861
656	6563

[1] T. EDQVIST: Tidskr. f. elem. mat. o. fys. kemi, 8, s. 235.

Ett nytt utförande av borsyreprovet.

Av HARRY HELLSTRÖM.

En av de mest använda metoderna för kvalitativt prov på borsyra och borat är borsyremetyl- resp. etylesters lågreaktion. Iakttagandet av den gröna färgen, som företrädesvis synes i lågtopparna, försvåras ofta av andra ämnens närvaro, vilka starkt färga lågan, i synnerhet om i provet ingående tunga metaller avlägsnats med natriumkarbonat.

Den här nedan beskrivna metoden utgör endast en variation av den ovannämnda. Apparaten utgöres av en mycket liten fraktionskolv; kolvens diam. är ungefär 1,5 cm, kolvhalsen cirka 4 cm och ansatsröret, vilket är utdraget till en kapillär, 2,5 cm långt (fig. 1). I kolven införes omkring 0,1 cm^3 av provet, 0,3 cm^3 konc. svavelsyra samt slutligen 0,7—0,9 cm^3 metylalkohol. (Innehållet bör ej fylla mer än halva kolven.) Kolven förses med kork och upphettas försiktigt till inträdande ångbildning, som lämpligen underlättas genom tillsats av några sandkorn. Borsyreprovaren hålles därvid så, att kapillären lutar något snett uppåt, varigenom ångorna antändas av gaslågan (fig. 2). Vid närvaro av större mängder borsyra erhålles en praktfullt grön lysande låga, vid mindre färgas den blott en kortare tid, och vid mycket små mängder färgas endast spetsen på lågan grön.

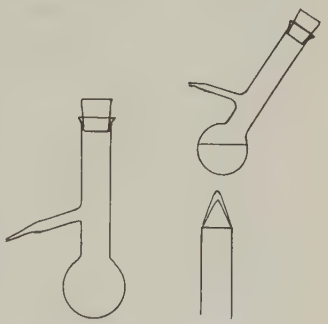


Fig. 1. Fig. 2.

Genom denna variation av metoden kan man pröva *det ursprungliga provet* på borsyra, vilket är omöjligt vid närvaro av t. ex. koppar enligt den vanliga.

Nedanstående tabell har erhållits vid några försök med apparaten.

Vol. H_3BO_3 i cm^3	Konc. molar.	Abs. mängd H_3BO_3 i mg	Färgreaktion.
0,1	$^1/_{10}$	0,6	Större delen av lågan grönfärgad.
0,05		0,3	
0,01		0,06	
0,1	$^1/_{30}$	0,2	Större delen grön.
0,05		0,1	$^1/_3$ av lågan »
0,01		0,02	Svag grönfärgning.
0,1	$^1/_{100}$	0,06	Tydlig »
0,05		0,03	Svag »
0,02		0,01	Ingen »

Vid ovan anförda försöksserie kunde alltså en absolut mängd borsyra av 0,2 mg upptäckas.

Apparaten kan lätt tillverkas av en lättsmält blåsrörskolv genom att värma kolvhalsen invid kolven och draga ut en kapillär med en glasstav eller ännu bättre genom att smälta vid ett rör.

Bokanmälningar.

W. LIETZMANN, *Aufbau und Grundlage der Mathematik* (Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk, Ergänzungsheft 3), B. G. Teubners förlag, Berlin, 1927. 89 sid. Kart. R.M. 2: 20.

Om man, fullständigt obekant med en vetenskap, önskar närmare lära känna den, är det utan tvivel en svårframkomlig och opraktisk väg att först söka svar på spörsmålet om ifrågavarande vetenskaps inre väsen och att göra sig en definitionsmässig utredning angående de grundläggande begreppen och utgångspunkterna. Detta gäller kanske matematiken mer än andra vetenskaper; inom detta ämne skulle väl ingen pedagog vilja taga på sitt ansvar att använda en från grunden deduktiv metod. Man måste så att säga begynna ett stycke in i ämnet, till att börja med bruka induktiva metoder — t. ex. vid införande av de fyra räknesätten på det lägsta stadiet — och först så småningom låta den deduktiva metoden bli den förhärskande. Det är sedan man hunnit ett rätt långt stycke på väg, sedan man fått känslan av att röra sig på känd mark, som behovet att utreda grundprinciperna börjar göra sig starkare gällande. Först då har man också de nödvändiga förutsättningarna för att kunna göra denna undersökning. Så ligger det också, historiskt sett, i allmänhet till med en vetenskaps utveckling. I matematikens historia finner man esomoftast, hur man räknar friskt på utan att göra sig så noga reda för, om grunden bär eller det bygges på lösan sand. Först senare, ofta efter årtusenden, komma de kritiska utredningarna angående fundamentets soliditet.

I titeln till ovan angivna arbete av den framstående tyske matematikpedagogen W. LIETZMANN finner man att »Aufbau» är ställt före »Grundlage». Denna ordning, som vid första ögonkastet kan störa logikern, avser just att understryka, att det ej är fråga om att från början bygga upp utan att i stället taga i närmare skärskådande en redan färdig byggnad, som för åskådaren ej är förut alldeles obekant.

Redan på skolstadiet, i de högsta ringarna, givas ofta tacksamma tillfällen att upptaga till behandling kritiska frågor angående matematikens förutsättningar. Här är den nämnda fram-

ställningen en förträfflig handledning. En kort redogörelse för det intressanta innehållet, fogad till upplysningen, att framställningen karakteriseras av synnerlig reda och klarhet, må vara rekommendation nog för boken.

Det första kapitlet avhandlar matematikens logik. Följande plock ur paragrafrubrikerna giva besked om innehållet: logikens grundbegrepp, definitionsfel, induktiv och deduktiv metod, bevis, bevisfel, nödvändiga och tillräckliga villkor, satsers omvändning, omöjlighetsbevis o. s. v. Särskilt intressant är utredningen angående bevisfelen och orsakerna till deras relativt vanliga förekomst inom matematiken. I detta sammanhang kan varmt rekommenderas samme författares två små häften: »Trugschlüsse» och »Wo steckt der Fehler?» (Teubners förlag), som innehålla många både roande och instruktiva exempel på dylika fel; en hel del av dessa uppgifter lämpa sig som exempel för lärjungarna med uppgift att utreda, var felet ligger.

I det andra kapitlet upptar författaren till granskning de geometriska grundbegreppen; här är av särskilt intresse jämförelsen mellan olika geometriska system. Intresset för vad författaren har att säga eggas jämt av exempel och tillämpningar av ofta överraskande art. Mot PEANOS kurva, anförd som exempel på en kurva, som övertäcker en hel yta (en kvadrat), vill anmälaren blott göra den invändningen, att de olika kurvgrenarna visserligen kunna fås hur nära varandra som helst; men kurvan går dock blott genom de »sällsynta» punkter, vilkas koordinater utmärkas av att åtminstone en av dem är rationell, medan det övervägande flertalet punkter på ytan gå fria för kurvan. Ur den synpunkten kan man lika litet säga, att kurvan övertäcker hela kvadraten som att de rationella talen övertäcka hela tallinjen. Kapitlet avslutas med en behandling av det fyrdimensionella rummet och dess åskådliggörande.

I nästa kapitel är det de aritmetiska grundbegreppen, som diskuteras. Här behandlas bl. a. mängdlärans principer, och författaren anför enkla bevis för att mängden av de algebraiska talen är numrerbar (av samma mäktighet som de hela talen), medan mängden av samtliga tal är av högre mäktighet.

I det sista kapitlet äro den matematiska analysens begrepp föremål för kritisk granskning: variabler, gränsvärden, oändligheten, funktioner, kontinuitet, derivator och differentialer. Dessa begrepp omfatta väl matematikens finaste och mest användbara instrument, vilka dock ofta bli föremål för en hårdhänt behandling. Den självrannsakan, till vilken Lietzmanns lilla bok i det avseendet inbjuder, utgör för varje matematikintresserad tillräcklig anledning att stifta dess bekantskap.

Hjalmar Olson.

R. W. POHL, *Einführung in die Elektrizitätslehre.* Julius Springers förlag. Berlin 1927. 256 sid., inb. 13: 80 M.

Under förra året utkom en ny elementär elektricitetslära av professor R. W. POHL i Göttingen. Denna bok torde genom sin i viss mån originella läggning, genom sin rikedom på enkla utmärkta experimentbeskrivningar och sin klara, konkreta framställning vara av så stort värde, att den förtjänar ett omnämnande i denna tidskrift.

Hela framställningen är empirisk; författaren bygger vid varje nytt moment på experiment, som alltid äro mycket instruktiva och dessutom enkelt och väl beskrivna.

Framställningen av elektricitetens natur är strängt atomistiskt genomförd i hela boken, varför man får en ovanligt enhetlig bild av elektricitetsuppfattningens nuvarande ståndpunkt. Denna enhetlighet förstärkes därav, att boken är fullständigt fri från historiska notiser. Författaren framhåller själv i en kort inledning, att det icke finns större anledning att börja elektricitetsläran med en historisk översikt än andra delar av fysiken.

Författaren börjar med att införa begreppen ström och spänning och genomgår i korthet instrument för mätning av dessa storheter, varefter han övergår till behandling av det elektriska fältet. Han lägger stor vikt vid en rätt förståelse av det elektriska fältet, och framhåller, att det är ett fundamentalt begrepp för vår moderna naturuppfattning. Framställningen av fältet är också mycket instruktiv och värdefull.

Han övergår sedan till det magnetiska fältet. I stället för att, som många författare göra, framhålla de formella likheterna mellan de elektriska och magnetiska fälten, är han mycket angelägen om att framhäva deras olikheter. Han säger också, att ju mer man beaktar de magnetiska och elektriska fältlinjernas väsensskillnad, desto lättare blir förståelsen för de magnetiska och elektriska företeelserna. Framställningen av den magnetiska kretsen och den därpå grundade induktionen är mycket klar och bygger på till synes mycket enkla och belysande experiment, delvis utförda med en »magnetisk spänningsmätare» bestående av en böjlig spole, som är gjord av en tråd upplindad på en läderrem.

Framställningen av förskjutningsströmmen i dielektrika synes mig vara mycket åskådlig och uppklarande.

Efter ett kapitel om elektriska svängningar kommer ett utförligt kapitel om »ledningsströmmarnas mekanism», där man får en mycket god framställning av elektricitetsledning i gaser, elektrolyter, metaller och icke metalliska kristaller.

I ett kapitel om elektriska fält i gränsskiktet mellan två ämnen behandlas olika hithörande saker, såsom termoelektricitet, element och ackumulatorer, mikrofonverkan m. m.

Efter en kortfattad framställning av radioaktivitet avslutas boken med ett kapitel om elektriska vågor. Detta är den klaraste och mest åskådliga behandling av detta ämne, som jag sett. Uppkomsten av de slutna elektriska fältlinjerna från en »dipol», som förberetts tidigare i boken, framstår här synnerligen påtagligt liksom de halvfria vågorna från en jordad antenn.

Författaren bemödar sig mångenstädes om att särskilt utreda sådana spörsmål, där missuppfattningar eller felaktiga föreställningar lätt uppstå. Av intresse är sålunda hans summariska beräkning av elektronhastigheten vid metallisk ledning. Med en strömtäthet av 6 amper/mm^2 finner han denna i koppar icke vara större än 0,5 mm/sek. d. v. s. 18 cm i timmen. Härvid utgår han från det visserligen rätt godtyckliga antagandet, att antalet fria elektroner är lika med antalet metallatomer per kubikcentimeter.

Det skall ej förnekas, att boken har sina svagheter. Ohms lag införes helt en passant under rubriken »Strömförbrukande voltmetrar». Motstånd definieras helt abstrakt som förhållandet mellan spänning och ström. Författarens benägenhet att börja en paragraf med ett kategoriskt påstående, som senare empiriskt bevisas, i stället för att låta slutsatsen följa först ur försöket verkar åtminstone på mig irriterande.

De brister, som kunna uppletas i boken, betyda emellertid föga i jämförelse med dess stora förtjänster.

W. Hallström.

Meddelande om ny materiell. Häft. 4. Likströms-växelströmsomformare, likriktare samt experiment med växelström. Av MAGNUS LEMOINE. Skolmateriellavdelningen, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1927. 38 sid., häft. kr. 1:—.

Föreliggande meddelande utgör ett supplement till författarens tidigare utgivna »Handledning i experimentell fysikundervisning». Med tanke på växelströmmarnas i praktiken alltmer framträdande roll är det författarens avsikt att i detta meddelande ge en experimentell, för undervisningen avpassad belysning av detta hittills försummade avsnitt av elektricitetsläran.

De första sidorna ägnas åt en beskrivning av en för skolbruk lämpad enankaromformare för omvandling av likström till växelström. Denna omformare har på författarens initiativ till

påseende monterats i firman Norstedt & Söners skolutställning; även en mindre dylik men med en för skolbruk tillräcklig effekt kan genom firman erhållas. Författaren beskriver omformarens arbetssätt som transformator av likström till enfas- eller trefasväxelström. För likström av 220 volt möjliggör omformaren uttag av trefasström av 135 volts spänning samt 155 och — vilket icke av författaren omnämnes — 78 volts enfasström. Effektiva spänningen hos enfasströmmen visas vara likströmsspänningen dividerad med $\sqrt{2}$. Angående trefasströmmen får man endast veta, att densamma är något lägre (135 volt). Till ledning för intresserade kunde författaren genom en geometrisk betraktelse lätt ha visat, att den är likströmsspänningen dividerad med $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

I ett kapitel beskrivas apparater för likriktning av växelström. Elektricitetsverken övergå alltmer till distribution av växelström i stället för likström, en omständighet, som kan förringa betydelsen av nyss omtalade omformare men som samtidigt framhäver betydelsen av en likriktare. I en läroanstalt kan likriktad ström behövas för laddning av ackumulatorer, drift av båglampor ävensom direkt för ett flertal experiment. En ingående redogörelse lämnas för flera olika typer av kvicksilver- och glödkatodlikriktare. Även andra möjligheter för likriktning äro emellertid tänkbara, och bland i handeln förekommande smärre apparater för laddning av ackumulatorer torde finnas typer av annan konstruktion, som med fördel kunna apteras för skolbruk.

I sista kapitlet lämnas ett rikligt urval av växelströmsexperiment. För att möjliggöra uttag av ström av godtycklig spänning upp till maskinspänningen har författaren konstruerat ett motstånd, bestående av trenne i stjärnkoppling förenade asbestgitter — speciellt avsett för trefasström — samt tvenne enklare för enfasström. Det förstnämndas mångsidiga användbarhet kan anmälaren av egen erfarenhet vitsorda.

En utomordentligt stor tjänst har författaren gjort våra undervisningsanstalter genom konstruktion av en oscillograf, vilken utförligt illustreras och beskrives i samma kapitel. Den, som skriver dessa rader, har sedan ett år tillbaka vid lektioner och föreläsningar haft talrika tillfällen att konstatera dess förträfflighet. Förefintligheten av *tvenne* svängande system gör det möjligt att med enkla kopplingar demonstrera den inom växelströmsläran så viktiga fasförskjutningen. Apparaten är lätt injusterbar, lätt skött och föga ömtålig, allt egenskaper, som för ett skolinstrument äro mycket viktiga. Att det svängande systemet icke återger strömmens övertoner kan, då det gäller skolstadiet,

icke anses vara någon nackdel. Förefintligheten av barlastmotstånd (c:a 40 ohm) är en ytterligare fördel, icke endast för den kontinuerliga regleringen av strömmen genom systemen utan även för underlättande av demonstration av motståndets inverkan på fasförskjutningen.

Den av författaren konstruerade modellen till induktionsmotor är överskådligt monterad och möjliggör både triangel- och stjärnkoppling. Dess arbetssätt beskrives ingående.

Ett namnfel har insmugit sig på sid. 27 och 28. Konstruktören av katodstrålröret för påvisande av växelströmmar och växelspänningar heter ej BROWN utan BRAUN.

För alla av växelströmmar intresserade erbjuder refererade uppsats mycket av värde. Kan densamma bidraga till att öka intresset för den hittills tyvärr inom undervisningen så tillbakasatta växelströmsläran, vore mycket vunnet.

Torsten Wetterblad.

ROBERT THORÆUS: *Kort handledning i fysikalisk teknik.* Albert Bonniers förlag, Stockholm 1927, 116 sid., 123 fig., häft. kr. 4: 25.

Författaren anger i företalet, att han genom utgivandet av föreliggande handledning velat avhjälpa bristen på litteratur inom detta område och framhåller med rätta, att en ingående kännedom om instrumentmakeriets hjälpmedel kräves av den, som vill följa med experimentalfysikens snabba utveckling.

Författaren behandlar ingående metallers bearbetning och de därtill erforderliga verktygen, glasblåsning m. m. Några kapitelrubriker må belysa det rikhaltiga innehållet: Verktyg, Olika material och deras egenskaper, Om spånskärning, Klippning, Svarvning, Gängskärning, Smidning och svetsning samt värmebehandling av verktygsstål, Lödning, Metallers ytbehandling, Olika glassorter, Skärning och borrning av rör och planglas, Glasblåsning, Ytbehandling av glas, Kittning och kittmedel.

Ett stort antal illustrationer, en mängd tabeller och recept jämte rikhaltiga materialupplysningar göra arbetet till en värdefull uppslagsbok.

Innehållet är väl genomarbetat och den typografiska utstyrseln tilltalande; genom kursivering av termer och beteckningar har god överskådlighet uppnåtts. Dock må såsom en brist framhållas frånvaron av ett kort sakregister; ett dylikt skulle avsevärt ha ökat arbetets bekväma utnyttjande.

Författaren har på ett lyckligt sätt löst sin uppgift, och handledningen kan därför med nöje rekommenderas till alla dem,

som äro intresserade av praktisk fysik. Särskilt för oss fysiklärare, som i regel få draga oss fram med begränsad tillgång på mekaniska hjälpmedel, bör den kunna bli till avsevärt gagn.

Ragnar Strömberg.

KARL HAHN und WILHELM KOCH, *Physikalische Schülerübungen.* B. G. Teubner, 1927. 2 Aufl. 140 sid. Kart. R.M. 3: 20.

Denna utmärkta handledning, utarbetad på grundvalen av GRIMSEHLS idéer och stödjande sig på en 25-årig lärarerfarenhet föreligger nu i en andra upplaga. Den omfattar inemot tvåhundra laborationsuppgifter fördelade på två avdelningar, en för det lägre och en för det högre skolstadiet. Uppgifterna äro valda och utformade med stor pedagogisk skicklighet och kräva i regel blott en enkel apparatur.

Boken är avsedd att användas av eleverna. Genom i knapp form avfattade beskrivningar, i regel illustrerade, anges experimentens yttre konturer och underlättas så lärarens preparationsarbete och ökas elevernas effektiva arbetstid. Förmodligen kommer mången svensk lärare att i likhet med recensenten finna, att man med gott resultat kan sätta den i händerna även på svenska pojkar.

I företalet och en kortfattad inledning diskuteras laborationernas syftemål och sättet för deras anordnande, varvid såväl lärare som elever få många goda råd. Företalet ger dessutom en inblick i den nuvarande situationen i Tyskland i vad angår elevlaborationernas ställning inom fysikundervisningen. Här liksom på andra områden har det sista decenniets svåra förhållanden lagt sin hämmande hand på utvecklingen, vilket resulterat i stora olikheter de olika skolorna emellan. Författarna beklaga också den knappa tid som efter undervisningsreformen i Preussen är anslagen åt praktiskt fysikaliskt arbete.

C. E. Blom.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift. Utgiven av Svenska Astronomiska Sällskapet. Årg. IX, 1928, dubbelhäfte 1 och 2.

Innehåll: STEN ASKLÖF, Bestämning av stjärnavstånd förr och nu. — BERTIL LINDBLAD, Om vintergatans rotation. — AKE WALLENQUIST, Om fotometriska undersökningar av öppna och slutna stjärnhopar. — KNUT LUNDMARK, Månytans formationer och av samma författare, Bidrag angående kometerna. — Notiser.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XL, 1928, häft. 3 och 4.

Ur innehållet: N:r 3. J. ARVID HEDVALL, Ueber Auflockerung, elektrische Leitfähigkeit und Reaktionsvermögen der Kristallgitter. — HANS V. EULER und SVEN GARD, Ueber die Reinigung der Co-Zymase aus Muskel. — H. V. EULER, EDV. BRUNIUS und STIG PROFFE, Milchsäurebildung aus Glykogen mit Trockenmuskel und Aktivatoren. — Statistiska tabeller. — Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor. N:r 4. YNGVE DALSTRÖM, Om klor som blekmedel för bomullscellulosa. — K. E. SKÄRBLOM, Autogensvetsning och etylenets användbarhet därför. — Referat och översikter. — Litteratur. — Statistiska tabeller. — Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor: Den svenska kemiska industrien under 1927.

Vetenskapen och livet. Årg. XIII, 1928, häft 3 (mars) och 4 (april). Hugo Geber. Kr. 1: 25 per häfte om 48 sid.

Ur innehållet i n:r 3: Det engelska flygväsendet. — Antika glas. — Fysikens framsteg i Tyskland. — Ultraljud-fyren. — Ultratryck för diamantframställning. — Ny användning för aktivt kol. — Moderna vägar. — Automobilernas konstruktion 1928. — Ur n:r 4: Några i Sverige sedda vädersolar och bimånar samt ringar och gårdar omkring sol och måne (av D. STENQUIST). — I flygplan över Europa. — Ljuset i reklamens tjänst. — Den tyska handelsflottans pånyttfödelse. — »Elektrisk musik.» — Radioråd (Höjning av likströmsspänning).

Era. *Elektricitetens rationella användning.* Årg. 1928, häft 3 (mars) och 4 (april). Per år kr. 5:—, per häfte 50 öre.

Ur innehållet i n:r 3: Industriell elektrifiering. — Stockholms elektricitetsverks utvidgningsplaner. — Dammsugare för hushållsbruk; en teoretisk utredning med redogörelse för de synpunkter, som varit vägledande vid konstruktionen av de välkända Elektroluxmodellerna. — Centrifugalkopplingar för kortslutsmotorer. — Ur n:r 4: Elektriska kokplattors verkningssätt; undersökningar vid Elektrovärmeinstitutet. — Elektriska glödgnings- och härdningsugnar. — Kraftbyggen. — Publikationer.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1928, 1 Hefte.

Den elementära avdelningen (**A**) redigeras av rektor F. BOGH och lektor H. J. PIHL, den mera vetenskapliga (**B**) av prof. H. BOHR och prof. T. BONNESEN. Avd. A per år kr. 8: —; hela tidskr. per år kr. 15: —.

Räknande sina anor från förra seklets mitt har denna tid-

skrift genom sitt gedigna innehåll städse burit vittnesbörd om det livliga intresset för matematisk forskning och matematikundervisning i vårt södra grannland. Vi ha all anledning att med intresse följa våra danska kollegers arbete, och Red. kommer därför att regelbundet lämna ett kort referat av dess innehåll.

Ur innehållet: **A.** U. CARSTENS, Om reella tal. — V. A. C. JENSEN, Virkelighedsgeometri-Abstraktionsgeometri. — J. V. CLAUSSEN, Gangeregning og Division med Brøk ved Hjælp af Tallinien og Tallene. — FR. FABRICIUS-BJERRE, En elementær maksimums- og minimumsopgave I, D. FOG, Samme II. — Opgaver til Løsning. — Danske Eksamensopgaver. — **B.** J. HJELMSLEV, Om et af den danske Matematiker G. MOHR udgivet Skrift »Euclides Danicus». — H. BOHR, Nogle Bemerkninger om formel Regning. — T. BONNESEN, En bemerkning om konvexe funktioner.

Avhandlingar och uppsatser, intagna i läroverkens årsredogörelser 1922/23-1926/27.

K. Skolöverstyrelsens statistiska avdelning har haft vänligheten insända följande förteckning på uppsatser inom tidskriftens ämnesgrupp, intagna i läroverkens årsredogörelser under de senaste fem åren.

E. SOLANDER. Potenser och logaritmer. Södermalms hal. Stockholm 1922/23.

K. A. MELANDER. Om lignin. Eksjö realskola 1923/24.

HJ. HAGELIN. Kvalitativ kemisk analys. H. allm. lärov. i Falun 1924/25.

H. P. KINDBERG. Experimentell deduktion av Ohm's lag. Gävle hal. 1924/25.

J. O. NORDLUND. Delningsfelbestämning för Uppsala Observatoriums Repsalds-ska vertikalcirkel. Hudiksvalls hal. 1924/25.

Beskrivning av de nyinredda undervisningslokalerna för fysik och kemi i H. reallärov. på Norrmalm i Stockholm 1924/25.

O. OLSSON. Härledning av några integrationsformler inom de elliptiska funktionernas teori. Örebro hal. 1925/26.

N. ENGELBREKTSSON. The phase limit motor as heat engine in cases of boiling or melting. Östersunds hal. 1925/26.

N. ENGELBREKTSSON. Expansion by heat regarded as a function of the phase limit motor. Östersunds hal. 1926/27.

F. DE BRUN. Ett kapitel ur den matematiska estetiken. Södermalms hal. Stockholm 1926/27.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

287) I en rätvinklig triangel bilda de vidskrivna cirklarnas radier aritmetisk serie. Angiv förhållandet mellan kateterna.

288) En cirkel med centrum O, punkten P och en sträcka l äro givna. Drag en korda genom P, vars projektion på linjen OP har längden l. *X.*

289) Om en inre och en yttre gemensam tangent till två cirklar äro vinkelräta mot varandra, så ligga samtliga gemensamma tangenters beröringspunkter med cirklarna på två mot varandra vinkelräta linjer, och de av cirklarna på dessa linjer avskurna kordorna äro lika stora. *Iter.*

290) Tre hyperblar äro uppritade, av vilka vardera tangerar en sida i en given triangel och har de båda återstående sidorna till asymptoter. Visa, att produkten av dessa hyperblars parametrar är lika med kuben på triangelns inskrivna cirkels diameter.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

291) Lös ekvationen

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$$

Svar: $135° + n \cdot 180°$; $n \cdot 360°$; $90° + n \cdot 360$.

292) I triangeln ABC är vinkeln B aritmetiska mediet till vinklarna A och C; sidan b är medelproportional till a och $3c$. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 15°; 60°; 105°.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

293) I ett regelbundet, 4-sidigt hörn är sidovinkeln $\frac{2}{3}$ av diagonalvinkeln. Beräkna hörnets sidovinkel. Svar: 60°.

294) Bestäm vinkelkoefficienterna för två mot varandra vinkelräta kordor i parabeln $y^2=4ax$, så att avståndet mellan de mot kordorna svarande diametrarna blir så litet som möjligt. Svar: ± 1.

295) I ett rakt, cylindriskt kärl, som står på ett horisontellt bord, hälles en vätska, tills systemets tyngdpunkt kommer så lågt som möjligt. Visa, att då detta inträffar, tyngdpunkten ligger i vätskans övre yta.

296) Att upprita en triangel, då man känner en vinkel samt höjden och medianen från dess spets.

Lösningar till uppg. 265—269, 277—279.

265) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^3-5x+2y&=0\\ y^3+2x-5y&=0\end{aligned}\right\}$$

Genom addition och subtraktion erhålles

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-xy+y^2)-3(x+y)&=0\\ (x-y)(x^2+xy+y^2)-7(x-y)&=0\end{aligned}\right\}$$

eller

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-xy+y^2-3)&=0\\ (x-y)(x^2+xy+y^2-7)&=0\end{aligned}\right\}$$

som sönderfaller i 4 system

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ y-y&=0\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y&=0\\ x^2+xy+y^2&=7\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x-y&=0\\ x^2-xy+y^2&=3\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=7\\ x^2-xy+y^2&=3\end{aligned}\right\}$$

varur svaret

x	0	$\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	1	2	-1	-2
y	0	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	1	-2	-1

Red.

Även löst av *B—r*.

266) *Visa, att uttrycket*

$$na^{n+1}-(n+1)a^n+1,$$

där a och n äro positiva hela tal och $a>2$, *alltid innehåller en kvadratisk faktor* >1. *Iter.*

Uttrycket blir 0 för $a=1$; dess derivata med avseende på a är

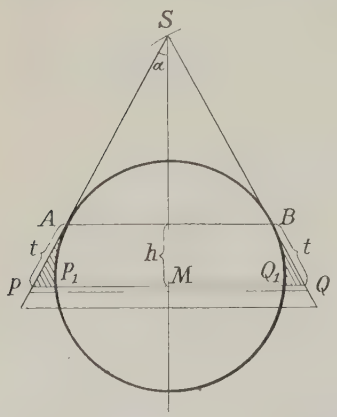
$$n(n+1)a^n-n(n+1)a^{n-1}$$

och blir även $=0$ för $a=1$. Uttrycket är således delbart med $(a-1)^2$, som ju för a helt tal >2 blir en kvadratisk faktor >1. *B—r.*

Även löst av *X*.

267) *Två sfärer tangera varandra utantill. Visa, att den dubbelt skålformiga rotationskropp, som begränsas av tangentkonen och de mot varandra vända sfäriska ytorna, halveras av sfärernas gemensamma tangentplan i tangeringspunkten.* *Iter.*

I konen S är en sfär inskriven, som tangerar den längs cirkeln AB (se fig.). PQ är ett mot konens axel SM vinkelrätt plan; $AP=t$. Om $V(t)$ betecknar den volym, som alstras av den krokliniga triangeln APP_1 vid rotation omkring axeln, så är



$$\frac{dV}{dh}=\frac{V'(t)}{\cos\alpha}=\pi(\overline{PM}^2-\overline{P_1M}^2)=$$
$$=\pi(PM+P_1M)(PM-P_1M)=$$
$$=\pi PQ_1\cdot PP_1=\pi t^2,$$

varav

$$V(t)=\frac{\pi t^3\cos\alpha}{3}.$$

Detta gäller oberoende av sfärens radie, så länge planet PQ råkar sfären. Då de t-värden, som motsvara de båda kropparna av ifrågavarande slag i uppgiften äro lika, måste deras volymer vara lika. *X.*

268) *F är den ena brännpunkten till en ellips, P en godtycklig punkt på kurvan. Sök sambandet mellan FP=r och normalen FN=n från F mot tangenten i P.* *X.*

Vare F_1 den andra brännpunkten. Utdrag F_1P, tills den råkar FN:s förlängning i Q. Sidorna i triangeln FF_1Q bli tydligen $2c$, $2a$ och $2n$.

Man får då:

$$4c^2=4a^2+4n^2-8an\cos Q$$

men $\cos Q$ är $=\frac{n}{r}$ och sambandet blir:

$$r=\frac{2an^2}{b^2+n^2} \text{ eller } \frac{1}{n^2}-\frac{2a}{b^2r}+\frac{1}{b^2}=0. \qquad B-r.$$

Anm. Om h är hastigheten i P för en partikel med massan m, som på tiden T genomlöper ellipsen, så att radius vektor FP på lika tider överfar lika ytor (enligt Kepler), så är $\frac{hn}{2}=\frac{\pi ab}{T}$ och enligt nyss funna relation efter multiplikation med $\frac{2\pi^2a^2b^2}{T^2}\cdot m$,

$$\frac{mh^2}{2}-\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\cdot\frac{m}{r}+\frac{2\pi^2a^2m}{T^2}=0.$$

Därav följer, att kraften verkar längs FP och har storleken

$$k=\frac{d}{dr}\left(\frac{mh^2}{2}\right)=-\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\cdot\frac{m}{r^2}. \qquad X.$$

(Jämför denna tidskrift, årg. 6, sid. 141 o. f. samt årg. 7, sid. 120.)

269) *A och B äro två punkter på en cirkel. Att draga de parallella kordorna AA_1 och BB_1, så att deras rektangel får ett givet värde k^2.* *X.*

Kalla AB för a! Konstruera $l=\frac{k^2}{a}$.

1) Avsätt på BA sträckan $AC=l$, så att A ligger mellan B och C. Drag cirkelns tangent t i B. Den med t parallella

linjen genom C skär cirkeln i A_1 (och A_1'). Drag från B kordan $BB_1 \parallel AA_1$. Sammanbind för bevisets skull A med B_1. Då är $\triangle AB_1B \sim A_1CA$, varav

$$BB_1 : BA = AC : AA_1$$

eller

$$AA_1 \cdot BB_1 = k^2.$$

I gränsläget sammanfalla A_1 och A_1' i B:s diametralt motsatta punkt; $AA_1 = BB_1$ och $k^2 = 4r^2 - a^2$, där r = cirkelns radie.

Vi erhålla alltså $k^2 < 4r^2 - a^2$ 2 lösn.

$k^2 = 4r^2 - a^2$ 1 »

$k^2 > 4r^2 - a^2$ 0 »

2) Avsätt $AC = l$ åt andra hållet, så att B och C ligga på samma sida om A. Samma konstruktion och bevis. Här få vi villkoren $k^2 < a^2$ 2 lösn.

$k^2 = a^2$ 1 » (AA_1 och BB_1 sammanf. i AB)

$k^2 > a^2$ 0 »

X.

277) *Två tal äro så beskaffade, att om det enas kvadrat multipliceras med 17 och det andras kvadrat multipliceras med 2, så erhållas två tresiffriga tal med siffrorna i motsatt ordning. Vilka äro dessa tal?* *Iter.*

De båda sökta talen betecknas med x och y. Låt z vara den sista siffran i talet $2x^2$ och således även den första siffran i talet $17y^2$. Varje kvadratiskt tal och alltså även talet x^2 slutar med någon av siffrorna 0, 1, 4, 5, 6, 9. Härav följer, att varje tal av formen $2x^2$ slutar med en av siffrorna 0, 2, 8. Nu är icke $z = 0$, emedan z skall vara den första siffran i talet $17y^2$. Alltså är antingen $z = 2$ eller $z = 8$. Jag försöker först med $z = 8$. Då följer i ordning

$$800 < 17y^2 < 900; \quad 47 < y^2 < 52; \quad y^2 = 49; \quad y = 7;$$

$$17y^2 = 833; \quad 2x^2 = 338; \quad x^2 = 169; \quad x = 13.$$

Svar: $x = 13$; $y = 7$.

Sedan försöker jag med $z = 2$. Då följer enligt samma metod

$$y^2 = 16; \quad y = 4; \quad x^2 = 136.$$

Den sista ekvationen är orimlig i hela tal.

Om man förutsätter, att talen $2x^2$ och $17y^2$ äro fyrsiffriga (i stället för tresiffriga) och att (såsom förut) den första siffran i vartdera talet är lika med den sista siffran i det andra talet, finner man enligt samma metod en och endast en lösning, nämligen

$$x=44; \quad y=13; \quad z=2;$$
$$2x^2=3\,872; \quad 17y^2=2\,873.$$

A. N. Zahl.

278) *Sök orten för brännpunkterna till alla parabler, som ha y-axeln till styrlinje och som tangera linjen* $y=2x+1$.

Beteckna vi brännpunktens koordinater med $(x_0; y_0)$ blir parabelns ekvation

$$y-y_0=2x_0\left(x-\frac{x_0}{2}\right).$$

Ekvationen för en tangent med vinkelkoefficienten k är

$$y-y_0=k\left(x-\frac{x_0}{2}\right)+\frac{x_0}{2k}.$$

Identifieras denna ekvation med den givna $y=2x+1$, erhålles

$$y_0-x_0+\frac{x_0}{4}=1$$

eller med bortlämnande av indices

$$3x-4y+4=0.$$ *Red.*

279) *I vilken punkt av sin paraboliska bana har en projektil, sedd från kanonmynningen, sin största vinkelhastighet? Ekvationsvinkeln* $=\alpha$, *initialhastigheten* $=c$.

Lösning: Kanonmynningen i origo, x-axeln horisontell. Projektilen antages vid tiden t befinna sig i punkten (x, y), vars radius vector $=\varrho$ och amplitud $=\theta$. Hastigheten i banan antages vara v, dess komposanter i axelriktningarna v_x och v_y. Hastighetsriktningens vinkel med x-axelns positiva riktning vare φ. Projektilens vinkelhastighet är då

$$\omega=\frac{v\sin(\varphi-\theta)}{\varrho}.$$

Vidare är

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{v_y}{v_x},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\varrho},\qquad \sin\varphi=\frac{v_y}{v},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\varrho},\qquad \cos\varphi=\frac{v_x}{v},$$

varav

$$\sin(\varphi-\theta)=\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta=\frac{xv_y-yv_x}{v\varrho},$$

således

$$\omega=\frac{xv_y-yv_x}{\varrho^2}.$$

Enligt bekanta formler är vidare

$$v_x=c\cos\alpha,\qquad x=ct\cos\alpha,$$

$$v_y=c\sin\alpha-gt,\quad y=ct\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

där g är tyngdkraftens acceleration. Man får då

$$xv_y-yv_x=-\tfrac{1}{2}cg\cos\alpha\cdot t^2,$$

$$\varrho^2=x^2+y^2=(c^2-cgt\sin\alpha+\tfrac{1}{4}g^2t^2)t^2,$$

således

$$\omega=-\frac{\frac{1}{2}cg\cos\alpha}{c^2-cg\sin\alpha\cdot t+\frac{1}{4}g^2t^2}=-\frac{\frac{1}{2}cg\cos\alpha}{c^2\cos^2\alpha+(c\sin\alpha-\frac{1}{2}gt)^2}.$$

Då täljaren är konstant, har $|\omega|$ sitt största värde, när nämnaren har sitt minsta värde, vilket inträffar för

$$t=\frac{2c\sin\alpha}{g}.$$

Man har då $x=\frac{c^2}{g}\cdot\sin 2\alpha$, $y=0$, varav framgår, att vinkelhastigheten är störst, när projektilen under nedslaget befinner sig i jämnhöjd med kanonmynningen. Vinkelhastigheten är då, med bortseende från förtecknet,

$$\omega_{\max}=\frac{g}{2c\cos\alpha}.$$

Iter.

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1928.[1]

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Vilket tal är så beskaffat, att 10-logaritmen för dess femtedel är femtedelen av det ifrågavarande talets 10-logaritm?
2. I en oändlig konvergent geometrisk serie är summan av de fyra första termerna 45 och summan av de två därpå följande termerna $2\frac{1}{4}$. Beräkna seriens kvot och dess summa.
3. I triangeln ABC är höjden från A mot BC 48,6 dm, höjden från B mot AC 29,4 dm samt vinkeln C 55°40′. Beräkna triangelns sidor och vinklar.
4. Den kring en given likbent triangel omskrivna cirkeln och samma triangels vidskrivna (utantill inskrivna) cirkel, som tangerar triangelns bas, hava lika stora radier. Triangelns bas är $= 2b$. Beräkna de lika stora sidornas längd (uttryckt i b).
5. En kub har kantlinjen a. På en av kubens diagonaler AB (A och B äro två hörn i kuben, som ej ligga i samma sidoyta,) har man tagit en punkt P mellan A och B så, att AP är $\frac{1}{3}$ av diagonalens längd. På en av de från A utgående kantlinjerna i kuben har man tagit en annan punkt Q så, att $AQ = \frac{2}{3}$ av kantlinjens längd. Beräkna avståndet PQ (uttryckt i a).
6. För tre olika värden på a kan bråket
$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 5x + a}$$
förkortas så, att nämnaren blir av första graden med avseende på x. Vilka äro de tre värdena på a och de mot dessa svarande förkortade bråken?
7. I en given rät cirkulär kon inskrives ett klot, som tangerar mantelytan och bottenytan. Därpå inskrives ett annat klot, som tangerar mantelytan och det förstnämnda klotet. Man betraktar tre med bottenytan parallella plan, nämligen två,

[1] Fullständiga lösningar återfinnas i Svenska Dagbladet för den 15 och 21 april 1928.

som innehålla var sin av de cirklar, längs vilka konen och kloten beröra varandra, samt det med dessa båda plan parallella planet genom klotens tangeringspunkt. Visa, att den del av konens mantelyta, som ligger mellan de två förstnämnda planen, är 4 gånger så stor som ytan av den cirkel, som det sistnämnda planet utskär av konen.

8. På sidorna AB, BC och CA i en liksidig triangel med sidan a tagas i ordning tre punkter P, Q och R så, att BQ blir dubbelt så stor som AP och CR tre gånger så stor som AP. Hur stor skall AP väljas, för att ytan av triangeln PQR skall bliva så liten som möjligt?

Resultat: **1.** $5\sqrt[4]{5} = 7{,}477$. **2.** Kvoten $= \pm\frac{1}{2}$; summan i båda fallen $= 48$. **3.** $a = 35{,}60$ dm, $b = 58{,}84$ dm, $c = 48{,}66$ dm; $\angle A = 37°{,}17$ och $\angle B = 87°{,}16$. **4.** $b(\sqrt{3}+1)$. **5.** $\frac{a}{3}\sqrt{3}$. **6.** a-värdena och bråken äro resp.: 0 och $\frac{x^2-x-2}{x-5}$; 6 och $\frac{x^2+x}{x-3}$; -6 och $\frac{x^2-2x}{x-6}$. **8.** $AP = \frac{1}{11}$ av omkretsen.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. I en cirkel med radien r är inskriven en fyrhörning $ABCD$ sådan, att diagonalen AC uppdelar densamma i två likbenta trianglar. Fyrhörningens yta är = kvadraten på radien. Sök sidornas längder.
2. Man har två konvergenta oändliga geometriska serier. För var och en av serierna gäller, att den ena seriens kvot är inverterade värdet av den andra seriens första term. Den ena seriens summa är dubbelt så stor som den andra seriens. Vidare förhåller sig summan av termerna med jämna ordningsnummer i den förra serien till summan av termerna med udda ordningsnummer i den senare serien som 8 : 9. Vilka äro serierna?
3. $ABCD$ är en given kvadrat. Genom A drages en rät linje, som skär sidan BC i P och sidan DC:s förlängning åt C till i E. Hur lång bör sträckan PB väljas, för att summan av ytorna av trianglarna ABP och PCE skall bliva så liten som möjligt? Kvadratens sida $= a$.
4. I en fyrsidig pyramid med kvadratisk basyta äro baskanterna 10 cm och sidokanterna 13 cm. Beräkna vinkeln mellan två varandra skärande sidoytor på pyramiden.

5. I likheten

$$\frac{6\sqrt{3} - 5x - 2 - x\sqrt{3}}{1 - 4x\sqrt{3} - 2x + 2\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} - y$$

äro x och y rationella tal. Bestäm deras värden.

6. På parabeln

$$x^3 = 4ay$$

har man tagit tre punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2) och (x_3, y_3) så belägna, att

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Bevisa, att normalerna till parabeln i dessa punkter råka varandra i en och samma punkt.

7. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} 2x = 4 \cos x \cdot \sin 2x - \cos x.$$

8. En rät cirkulär kon är given. Ett klot har sin medelpunkt i konens topp och tangerar konens bottenyta. Hur stort måste förhållandet mellan bottenradien och höjden i den givna konen vara, för att klotets yta skall dela konen i två delar med lika stora volymer?

9. Att konstruera ett parallelltrapets, då man känner de båda parallella sidorna, förhållandet mellan de båda icke parallella sidorna samt vinkeln mellan de icke parallella sidornas förlängningar.

Resultat: **1.** $\frac{r}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 1{,}932r$ och $\frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0{,}518r$, om AC är bas i båda trianglarna. **2.** $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ och $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ **3.** $PB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, då trianglarnas summa $= a^2(\sqrt{2} - 1)$. **4.** $100°{,}00$. **5.** $x = \frac{3}{5}$, $y = 17$. **7.** $90° + n \cdot 180°$; $7°{,}5 + n \cdot 90°$; $37°{,}5 + n \cdot 90°$. **8.** $\sqrt{3{,}5 - \sqrt{4{,}25}} = 1{,}199$.

Uppgifter i fysik för realgymnasiet.

1. På en likarmad och med lika tunga vågskålar försedd våg ligga mitteleggen och de två eggar, som uppbära vågskålarna, så att skärningspunkterna mellan eggarna och ett mot dessa vinkelrätt plan genom balansens tyngdpunkt bilda en likbent, trubbvinklig triangel ABC. Mitteleggen, balansens vridningsaxel, går genom den trubbiga vinkelns spets C. Triangeln ABC:s lika stora sidor äro a cm och dess höjd CD mot basen x cm. Vågen är konstruerad så, att med lika belastning av

vågskålarna D vid jämvikt ligger lodrätt under C. Vardera vågskålen väger jämte belastning P gr. Balansen, som väger Q gr, har sin tyngdpunkt belägen på b cm:s avstånd från C. Om ena vågskålen belastas med en liten övervikt p gr, gör balansen ett utslag av $v°$. Angiv sambandet mellan v, P, Q, p, a, b och x samt härled ur detta, att utslaget är oberoende av belastningen och vikten av vågskålarna endast i det gränsfall, då vinkeln C är 180°, d. v. s, då de tre eggarna ligga i samma plan.

2. I en Atwoods fallmaskin väga vikterna i snörets båda ändar resp. 400 och 500 gr. Huru stor är spänningen i snöret, då systemet kommit i rörelse?
3. Vid vilken temperatur har en blandning av lika viktsdelar luft och lysgas en vikt av 1 gr per liter, då blandningens tryck är 1 000 mm kvicksilver? Lysgasens täthet är 0,5 av luftens. En liter luft väger vid 0° C och 760 mm tryck 1,293 gr. Trycket i en gasblandning är lika med summan av de tryck, som vardera gasen skulle utöva, om den ensam fyllde kärlet. Gasernas utvidgningskoefficient är $\frac{1}{273}$.
4. Två plana ogenomskinliga skärmar stå parallellt på 140 cm avstånd från varandra. I den främre är upptaget ett cirkulärt hål av ungefär 2 cm radie. På den normal, som går genom hålets medelpunkt, befinner sig på 60 cm avstånd från hålet en punktformig ljuskälla, som genom öppningen belyser en del av den bakre skärmen. Därefter täckes hålet med en negativ lins, så placerad, att linsens optiska huvudaxel sammanfaller med ovan nämnda normal. Belysningen på den bakre skärmen i en punkt mitt för öppningen sjunker då till $^1/_9$ av sitt föregående värde. Beräkna linsens fokaldistans.
5. Ett mikroskop med konstant avstånd mellan objektiv och okular inställes så, att man får en skarp bild av ett föremål, som befinner sig på botten av ett glaskärl. Objektivet består av en plankonvex lins med den plana ytan vänd mot föremålet på 5 mm avstånd från detta. Huru mycket skall mikroskopet förskjutas, för att man tydligt skall se föremålet genom mikroskopet, om i kärlet hälles så mycket vatten, att objektivet vätes? Brytningsexponenten för vatten är 1,33.
6. En magnetnål gör 40 svängningar per minut, då den kring en vertikal axel genom tyngdpunkten utför svängningar i horisontalplanet. Magnetnålen upphänges sedan, så att den är fritt rörlig kring en horisontell axel genom tyngdpunkten, och försättes i svängningar i det magnetiska meridianplanet. Huru stor är svängningstiden i det senare fallet, då inklinationen på orten är 70°?

7. En homogen konstantantråd av 200 mm längd och 0,2 mm diameter är med sina ändar fästad vid två fasta stöd på samma höjd och belastad på mitten med en lämplig vikt, så att trådens båda hälfter bilda 60° vinkel med lodlinjen. Tråden uppvärmes med en elektrisk ström på 0,15 ampère, så att temperaturen är konstant längs hela tråden. Från den varma trådens yta bortgår en viss värmemängd, som är direkt proportionell mot ytans storlek och mot skillnaden mellan trådens och den omgivande luftens temperatur. Denna värmemängd är för ifrågavarande tråd 0,015 gkal per minut, då ytan är 1 cm² och temperaturskillnaden 1° C. Vid temperaturjämvikt bortgår per tidsenhet lika mycket värme, som den elektriska strömmen alstrar. Trådens lineära utvidgningskoefficient är 0,000015, dess specifika ledningsmotstånd 0,49 och omgivningens temperatur 0° C. Huru mycket sänker sig vikten? En wattsekund är 0,24 gkal.
8. Beskriv ett optiskt eller ett akustiskt interferensfenomen.

Resultat: **1.** $\operatorname{tg} v = \frac{p\sqrt{a^2 - x^2}}{Q \cdot b + (2P + p) \cdot x}$; v är oberoende av P endast om $x = 0$, d. v. s. om vinkeln $C = 180°$. **2.** $444\frac{4}{9}$ gf. **3.** 36°,7 C. **4.** $f = -21$ cm. **5.** Avståndet mellan objektiv och föremål bör ökas till 6,65 mm, d. v. s. mikroskopet förskjutas 1,65 mm. **6.** 0,8772 sek. **7.** Trådens temp. = 53°,63 C; sänkningen = 0,161 mm.

Realskolexamen V. T. 1928.

Provräkning.

1. Lös ekvationen:

$$\left(\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{5}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{5}\right)^2 = 0{,}4\,x^2 - x.$$

2. 20 man ha arbetat 8 timmar dagligen i 15 dagar och därunder utfört $\frac{3}{10}$ av ett arbete. När blir arbetet färdigt, om 4 man nu sluta och de återstående 16 arbeta 7 timmar dagligen?
3. Den 10 april 1927 lånade en person 1 200 kronor mot $5\frac{1}{2}$ % årlig ränta. Den 22 maj samma år ville han betala sin skuld genom att lämna 400 kronor kontant och dessutom en 3 månaders växel, som genast kunde diskonteras efter 6 %. På hur stort belopp borde växeln lyda?
4. En bilfirma säljer smörjolja till ett pris av 90 öre per liter. Hur många procent förtjänar firman, om den inköpt oljan för 90 öre per kg och en liter av oljan väger 920 gr?

5. En i en ort A. bosatt person cyklade vid ett tillfälle hemifrån till en ort B., belägen 15 km från A. Han stannade i B. 35 minuter, varefter han återvände hem till fots. Vid återkomsten fann han, att han varit borta i $4\,{}^{3}/_{4}$ timmar. Hur fort gick han, om man kan antaga, att han cyklade $2\,{}^{1}/_{2}$ gånger så fort som han gick?
6. I en cirkel med radien 2 cm är inskriven en likbent triangel. Vinkeln mellan de lika sidorna är 45°. Beräkna triangelns yta.
7. En grindstolpe av furu med kvadratisk basyta har dimensionerna 8 tum × 8 tum × 2,2 m. Om stolpen kostar 5,59 kr., vilket pris per kubikfot hade beräknats? 1 fot = 12 tum = 3 dm.
8. En bensinbehållare har formen av en cylinder med en därpå ställd kon. Basdiametern är 30 cm, cylinderns sida 34 cm och avståndet från mynningen, belägen i konens spets, till botten 47 cm. Hur många liter rymmer behållaren? ($\pi = 3{,}14$).

Resultat: **1.** $x = 0{,}4$. **2.** Efter ytterligare 50 dagar. **3.** 820 kr. **4.** $8{,}7\underline{0}$ %. **5.** 5,04 km i tim. **6.** $(2\sqrt{2} + 2)$ cm^2 = 4,828 cm^2. **7.** $1{,}7\underline{2}$ kr. **8.** $27{,}\underline{1}$ liter.